Primärzerlegung und Faktorialität

Wir fixieren einen noetherschen Ring R, können daher nach (???) voraussetzen, dass jedes echte Ideal $\boldsymbol{a}$ eine Primärzerlegung $(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$ besitzt,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{q}_1 \cap \ldots \cap \boldsymbol{q}_n \text{ mit Primäridealen } \boldsymbol{q}_i.$$

Bezeichnung. Die Primärzerlegung $(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$ heißt *unverkürzbar* (auch *minimal*), falls die Primideale $\sqrt{\boldsymbol{q}_i}$ paarweise verschieden sind und für keinen Index j eine Inklusion $\bigcap_{i, i\neq j} \boldsymbol{q}_i \subseteq \boldsymbol{q}_j$ besteht.

Satz. Jedes Ideal $\boldsymbol{a} \neq R$ besitzt eine unverkürzbare Primärzerlegung.

Beweis. Zunächst betrachten wir Primärideale $\boldsymbol{q}_1, \ldots \boldsymbol{q}_t$ mit

$\sqrt{\boldsymbol{q}_1} = \ldots = \sqrt{\boldsymbol{q}_t} =: \boldsymbol{p}$. Dann ergibt sich

$$\sqrt{\boldsymbol{q}_1 \cap \ldots \cap \boldsymbol{q}_t} = \underbrace{\sqrt{\boldsymbol{q}_1}}_{\boldsymbol{p}} \cap \ldots \cap \underbrace{\sqrt{\boldsymbol{q}_t}}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p},$$

und $\boldsymbol{q} := \boldsymbol{q}_1 \cap \ldots \cap \boldsymbol{q}_t$ ist ebenfalls ein Primärideal: Aus $ab \in \boldsymbol{q}$ und $a \notin \boldsymbol{q}$ folgt nämlich $a \notin \boldsymbol{q}_i$ für wenigstens einen Index i, daher $a \in \sqrt{\boldsymbol{q}_i} = \boldsymbol{p} = \sqrt{\boldsymbol{q}}$.

Wir ersetzen nun in einer beliebigen Primärzerlegung von $\boldsymbol{a}$ alle Primärideale mit gleichem Radikal durch ihren Durchschnitt.

Werden danach schrittweise solche Primärideale weggelassen, die den Durchschnitt der übrigen enthalten, so ergibt sich eine unverkürzbare Primärzerlegung. ❑

Nun werden $\boldsymbol{a}$ diejenigen Primideale $\boldsymbol{p}$ zugeordnet, für die ein Element $\overline{x} \in R/\boldsymbol{a}$ mit $\boldsymbol{p} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(\overline{x})}$ existiert. Der hier auftretende Annulator ist der vom Rechnen mit Idealen vertraute Quotient $(\boldsymbol{a} : x)$, und offensichtlich ist $\overline{x}$ in diesem Fall nicht die Nullklasse, d.h. $x \notin \boldsymbol{a}$.

Satz – Definition. (*assoziierte Primideale*)

Ist $(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$ eine unverkürzbare Primärzerlegung des Ideals $\boldsymbol{a}$, so sind die Primideale $\boldsymbol{p}_i := \sqrt{\boldsymbol{q}_i}$ durch $\boldsymbol{a}$ eindeutig bestimmt; sie heißen *zu* $\boldsymbol{a}$ *assoziiert*. Dabei gilt insbesondere:

(1) Für $x \in R \setminus \boldsymbol{a}$ ist

$$(\boldsymbol{a} : x) = \bigcap_{i,\, x \notin \boldsymbol{q}_i} (\boldsymbol{q}_i : x)$$

mit $\boldsymbol{p}_i$-primären Idealen $(\boldsymbol{q}_i : x)$. Insbesondere gilt

$$\sqrt{(\boldsymbol{a} : x)} = \bigcap_{i,\, x \notin \boldsymbol{q}_i} \boldsymbol{p}_i.$$

(2) $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ist genau dann assoziiertes Primideal zu $\boldsymbol{a}$, wenn $\boldsymbol{p} = \sqrt{(\boldsymbol{a} : x)}$ für ein Element $x \in R$. Dabei kann x so gewählt werden, dass $(\boldsymbol{a} : x)$ ein Primärideal ist.

(3) Die bezüglich der Inklusion minimalen Elemente von $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ heißen *minimale*, auch *isolierte* Primideale des Ideals $\boldsymbol{a}$. Sie bilden gleichzeitig die minimalen Elemente in der Menge aller Primideale, die das Ideal $\boldsymbol{a}$ enthalten.

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung.

(∗) $\boldsymbol{q}$ sei Primärideal mit $\sqrt{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p}$ und $x \notin \boldsymbol{q}$, dann ist $(\boldsymbol{q} : x)$ ein $\boldsymbol{p}$-primäres Ideal.

Zum Beweis bemerken wir, dass $\boldsymbol{q} \subseteq (\boldsymbol{q} : x) \subseteq \boldsymbol{p}$, wobei die zweite Inklusion daraus folgt, dass $\boldsymbol{q}$ ein $\boldsymbol{p}$-primäres Ideal ist. Bilden wir auf beiden Seiten das Radikal, so ergibt sich $\sqrt{(\boldsymbol{q} : x)} = \boldsymbol{p}$.
Um zu zeigen, dass $(\boldsymbol{q} : x)$ primär ist, wählen wir $a \cdot b \in (\boldsymbol{q} : x)$. Dann ist $abx \in \boldsymbol{q}$, folglich $ax \in \boldsymbol{q}$ (d.h. $a \in (\boldsymbol{q} : x)$) oder $b \in \sqrt{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} = \sqrt{(\boldsymbol{q} : x)}$; damit folgt $(*)$.

Die Eindeutigkeit der Ideale $\boldsymbol{p}_i = \sqrt{\boldsymbol{q}_i}$ ergibt sich aus (2); wir beweisen zunächst (1): Für $x \notin \boldsymbol{a} = \boldsymbol{q}_1 \cap \ldots \cap \boldsymbol{q}_n$ ist

$$(\boldsymbol{a} : x) = (\boldsymbol{q}_1 : x) \cap \ldots \cap (\boldsymbol{q}_n : x) = \bigcap_{i, x \notin \boldsymbol{q}_i} (\boldsymbol{q}_i : x)\,,$$

denn $(\boldsymbol{q}_i : x) = R$ für $x \in \boldsymbol{q}_i$. Wenden wir auf beide Seiten das Radikal an, so ergibt sich nach $(*)$

$$\sqrt{(\boldsymbol{a} : x)} = \bigcap_{i, x \notin \boldsymbol{q}_i} \sqrt{(\boldsymbol{q}_i : x)} = \bigcap_{i, x \notin \boldsymbol{q}_i} \boldsymbol{p}_i\,;$$

es folgt (1). Die gegebene Primärzerlegung für $\boldsymbol{q}$ ist unverkürzbar, daher $\bigcap_{j, j \neq i} \boldsymbol{q}_i \not\subseteq \boldsymbol{q}_i$ für alle Indizes i. Wir wählen $x_i \in \bigcap_{j, j \neq i} \boldsymbol{q}_i \setminus \boldsymbol{q}_i$ und erhalten aus den obigen Formeln

$$(\boldsymbol{a} : x_i) = (\boldsymbol{q}_i : x_i) \quad \text{und} \quad \sqrt{(\boldsymbol{a} : x_i)} = \boldsymbol{p}_i.$$

Nach $(*)$ sind die Ideale $(\boldsymbol{a} : x_i)$ überdies $\boldsymbol{p}$-primär. Zum Beweis von (2) bleibt daher nur noch zu zeigen, dass jedes Primideal $\boldsymbol{p}$ der Gestalt $\boldsymbol{p} = \sqrt{(\boldsymbol{a} : x)}$ eines der Ideale $\boldsymbol{p}_i$ ist. Dazu verwenden wir erneut die unter (1) bewiesene Formel:

$$\boldsymbol{p} = \sqrt{(\boldsymbol{a} : x)} = \bigcap_{i, x \notin \boldsymbol{q}_i} \boldsymbol{p}_i \subseteq \boldsymbol{p}_j \quad \text{für alle } j,$$

und andererseits folgt aus

$$\boldsymbol{p} = \bigcap_{i, x \notin \boldsymbol{q}_i} \boldsymbol{p}_i \supseteq \prod_{i, x \notin \boldsymbol{q}_i} \boldsymbol{p}_i$$

auch $\boldsymbol{p} \supseteq \boldsymbol{p}_k$ für einen Index k, daher $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_k$.

Zu (3) bemerken wir, dass ein Primideal $\boldsymbol{p} \supseteq \boldsymbol{a}$ auch das Radikal von $\boldsymbol{a}$ umfasst,

$$\boldsymbol{p} \supseteq \sqrt{\boldsymbol{a}} = \sqrt{\boldsymbol{q}_1 \cap \ldots \cap \boldsymbol{q}_n} = \boldsymbol{p}_1 \cap \ldots \cap \boldsymbol{p}_n \supseteq \boldsymbol{p}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{p}_n.$$

Es folgt $\boldsymbol{p} \supseteq \boldsymbol{p}_i$ für wenigstens einen Index i (vgl. ???). Wird nun $\boldsymbol{p} \supseteq \boldsymbol{a}$ minimal gewählt, so muss es mit einem der isolierten Primideale $\boldsymbol{p}_i$ übereinstimmen. ❑

Wir bemerken, dass die nicht isolierten unter den assoziierten Primidealen des Ideals $\boldsymbol{a}$ gelegentlich *eingebettet* genannt werden. Diese Bezeichnung erscheint zunächst irreführend, da sie sich offenkundig nicht auf die Inklusionsbeziehung von Teilmengen bezieht; sie besitzt jedoch einen – hier nicht diskutierten – geometrischen Sinn.

Anwendung. (*Potenzprodukte von Primelementen*)

R sei ein noetherscher Integritätsbereich, $p_1, \ldots, p_n$ von 0 verschiedene, paarweise nicht-assoziierte Primelemente sowie $\nu_1, \ldots, \nu_n$ positive natürliche Zahlen. Dann ist $\big((p_1^{\nu_1}), \ldots, (p_n^{\nu_n})\big)$ eine unverkürzbare Primärzerlegung des Hauptideals $(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu_n})$, und $(p_i) = \sqrt{(p_i^{\nu_i})}$ sind die paarweise verschiedenen assoziierten Primideale.

Beweis. Wir zerlegen den Beweis in die folgenden Schritte.

(1) Jede Potenz eines Primelements $p \in R \setminus \{0\}$ erzeugt ein (p)-primäres Hauptideal.

Dazu sei $t > 0$ und $\boldsymbol{p}$ ein zu (p^t) assoziiertes Primideal. Dann ist $\boldsymbol{p} \supseteq (p^t)$ und daher $\boldsymbol{p} \supseteq (p)$; wir beweisen die umgekehrte Inklusion: Nach dem Satz existiert $x \in R \setminus (p^t)$ nit $\boldsymbol{p} = \big((p^t) : x\big)$. Ist $a \in \boldsymbol{p}$, so folgt $ax = qp^t$ mit $q \in R$. Da p Primelement und p^t kein Teiler von x ist, ergibt sich nach wiederholter Division $p|a$, d.h. $a \in (p)$.
Nun ist $\boldsymbol{p}$ das einzige assoziierte Primideal zu (p^t); die Existenz einer minimalen Primärzerlegung zeigt, dass (p^t) selbst schon Primärideal ist.

(2) Für ein Primelement $p \in R$, das kein Teiler von $f \in R$ ist, gilt $(p^t) \cap (f) = (p^t f)$.

Die Inklusion „$\supseteq$“ ist offensichtlich. Nun sei $a \in (p^t) \cap (f)$; dann ist $a = bp^t = cg$ mit $b, c \in R$. Da p nicht g teilt, folgt $p|c$; wiederholte Division ergibt $b \in (g)$.

(3) $(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu_n}) = (p_1^{\nu_1}) \cap \ldots \cap (p_n^{\nu_n})$ ist nach (1), (2) eine Primärzerlegung mit assoziierten Primidealen $(p_i) = \sqrt{(p_i^{\nu_i})}$; diese sind paarweise verschieden, da p_i und p_j für $i \neq j$ nicht assoziiert sind.

Um zu zeigen, dass die gefundene Primärzerlegung unverkürzbar ist, verbleibt (bis auf Permutation der Indizes) die Verifikation, dass keine Inklusion

$$(p_1^{\nu_1}) \cap \ldots \cap (p_{n-1}^{\nu_{n-1}}) \subseteq (p_n^{\nu_n})$$

besteht. Angenommen, wir hätten eine solche Inklusion, dann ist das Produkt $p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\nu_{n-1}}$ Element des Durchschnitts auf der linken Seite, daher durch $p_n^{\nu_n}$ teilbar. Das Primelement p_n teilt folglich eines der Primelemente p_i mit $i < n$, was offenkundig unmöglich ist. ❑