Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 1 zum 18.4.05

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -6 \\ -4 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$
unter Verwendung geeigneter Zeilentransformationen für A.

2. Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

(1) $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{F}_5$ und

(2) $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
über dem Körper $\mathbb{F}_2$.

3. Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix
$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3t & 1 & -1 & t \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.* K sei ein Körper. Für $a_1, \ldots, a_n \in K$ setzen wir
$$(a_1, \ldots, a_n) := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}.$$
Beweisen Sie:

(1) $(a_1, \ldots, a_n) = a_n \cdot (a_1, \ldots, a_{n-1}) + (a_1, \ldots, a_{n-2})$

(2) $$\frac{(a_1, \ldots, a_n)}{(a_2, \ldots, a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

5. V, W bezeichnen K-Vektorräume und $\varPhi : \mathrm{Hom}_K(V, W) \times V \to W$ die Abbildung, die für $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\boldsymbol{x} \in V$ durch $\varPhi(\varphi, \boldsymbol{x}) := \varphi(\boldsymbol{x})$ definiert ist.
   (1) Zeigen Sie, dass $\varPhi$ bilinear ist.
   (2) Für welche Vektorräume V ist $\varPhi$ surjektiv?

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 1 zum 18.4.05

1. **Lösung.** $a_{11} = 0,$ daher wird – wie beim gaußschen Algorithmus – zunächst die erste Zeile mit der zweiten vertauscht. Dabei ändert sich das Vorzeichen der Determinante, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & -6 \\ -4 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nun können Vielfache der ersten Zeile von den folgenden subtrahiert werden, so dass die Einträge a_{i1} verschwinden. Wir erhalten eine neue Matrix mit derselben Determinante, und entsprechend wird mit der zweiten Zeile verfahren, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Zeile der zuletzt aufgetretenen Matrix mit 3 bzw. 4 multipliziert; entsprechend erhält die Determinante den Faktor $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Es ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & 6 \\ 0 & 0 & 24 & 20 \end{pmatrix},$$

daher nach Subtraktion der dritten Zeile von der vierten

$$-\det(A) = \frac{1}{12} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 14 = 28.$$

Wir erhalten $\det(A) = -28.$

Das hier verwendete Verfahren zur Bestimmung der Determinante ist eine Variante des gaußschen Algorithmus. Es ist allgemein ausführbar und beruht auf den folgenden Eigenschaften.

(1) Bei Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen bleibt die Determinante einer Matrix unverändert.

(2) Bei Multiplikation einer Zeile der Matrix A mit einer Zahl c wird $\det(A)$ in $c \cdot \det(A)$ überführt.

(3) Durch Vertauschen zweier Zeilen der Matrix A wird $\det(A)$ in $-\det(A)$ überführt.

(4) Die Determinante einer (z.B. oberen) Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge ihrer Hauptdiagonale.

2. **Lösung.**

(1) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

(2) Wir erhalten

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. **Lösung.** Es ist

$$\det\left(A(t)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3t & 1 & -1 & t \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \\ 3t+2 & 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3t+2 & 1 & t \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 5t+2 & 2t+1 & t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 5t+2 & 2t+1 \end{vmatrix} = 10t+3.$$