Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 2 zum 2.5.05

1. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A in Abhängigkeit von den Parametern s, t aus dem Körper K.
$$A = \begin{pmatrix} -2t+7s & -t+5s & t+s \\ 8t+8s & 8t+8s & -2t-2s \\ 2t+2s & 7t+7s & 2t+2s \end{pmatrix}$$

2. Wir untersuchen Determinanten von Endomorphismen eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes V.
   (1) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und φ definiert durch
   $$\varphi(x,y,z) := (x, 0, -x+y+z).$$
   Bestimmen Sie $\det(\varphi)$.
   (2) U und W seien Unterräume, für die $V = U \oplus W$ gilt. Durch die folgenden Vorschriften sind auf eindeutige Weise lineare Endomorphismen von V definiert.
   $$\psi_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in W$$
   $$\psi_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in W$$
   Bestimmen Sie die Determinanten von ψ_1 und ψ_2.
   (3) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $\alpha \in K$ ein Endomorphismus des Vektorraumes $V \neq \mathbf{0}$ existiert, dessen Determinante α ist.

3. Wir untersuchen Abbildungen $V \times V \to K$ für K-Vektorräume V. Entscheiden Sie, in welchem Fall Bilinearität vorliegt.
   (1) $f(x,y) := x \cdot {}^{\mathrm{t}}y$ für den Standardvektorraum $V = K^n$,
   (2) $g(A,B) := \mathrm{tr}(A \cdot B)$ für den K-Vektorraum $V = \mathrm{M}(n;K)$,
   (3) $h(A,B) := \det(A \cdot B)$ für den K-Vektorraum $V = \mathrm{M}(n;K)$.

4. f sei die Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$, die durch
   $$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = -x_1y_1 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2$$
   definiert wird.
   (1) Geben Sie die Matrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = ((0,-1),(-1,-2))$ an.
   (2) Geben Sie die Matrix $B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}' = ((1,2),(-2,-1))$ an.
   (3) Geben Sie die Übergangsmatrix $U := \mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$ an und überzeugen Sie sich davon, dass $B = {}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U$ ist.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

5. Es sei $A \in M(n; \mathbb{R})$, sowie $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} \cdot A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ definierte quadratische Form.

   (1) Zeigen Sie, dass der Wert von $\boldsymbol{q}$ nur von $A + {}^{\mathrm{t}}A$ abhängt. Folgern Sie, dass A stets durch eine eindeutig bestimmte symmetrische Matrix B ersetzt werden kann, ohne dass sich dabei die Abbildung $\boldsymbol{q}$ ändert.

   (2) Es sei $n = 3$,
   $$\boldsymbol{q}(x_1, x_2, x_3) := -x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3 + 3x_3^2.$$
   Bestimmen Sie die gemäß (1) existierende symmetrische Matrix B mit der Eigenschaft $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot B \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

   (3) Geben Sie eine Basis des Standardraumes $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich der die unter (2) definierte Form $\boldsymbol{q}$ eine Diagonalmatrix besitzt.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 2 zum 2.5.05

1. **Lösung.** Eine prinzipielle Möglichkeit zur Behandlung solcher Aufgaben ist durch das Determinantenkriterium gegeben; dazu sind die Nullstellen aller Determinanten quadratischer Teilmatrizen zu untersuchen. Wir gehen hier anders vor, dabei werden die folgenden Fälle unterschieden.

   (1) $s = t = 0$, dann ist $A = 0$ und folglich $\text{rang}(A) = 0$.

   (2) $s = 0$ und $t \neq 0$; dann ergibt sich
   $$A = \begin{pmatrix} -2t & -t & t \\ 8t & 8t & -2t \\ 2t & 7t & 2t \end{pmatrix}.$$
   Wegen $t \neq 0$ ist $\text{rang}(A) = \text{rang}(\frac{1}{t} \cdot A)$,
   $$\frac{1}{t} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 8 & 8 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$
   also $\text{rang}(A) = 2$.

   (3) $s \neq 0$, so ist $\text{rang}(A) = \text{rang}(\frac{1}{s} \cdot A)$. Setzen wir $u = \frac{t}{s}$, so ist
   $$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} -2u+7 & -u+5 & u+1 \\ 8u+8 & 8u+8 & -2u-2 \\ 2u+2 & 7u+7 & 2u+2 \end{pmatrix}.$$
   Wir berechnen die Determinante
   $$\begin{vmatrix} -2u+7 & -u+5 & u+1 \\ 8u+8 & 8u+8 & -2u-2 \\ 2u+2 & 7u+7 & 2u+2 \end{vmatrix} = 150u^2 + 300u + 150$$
   und erhalten für $u \neq -1$ (d.h. $t \neq -s$) $\det(A) \neq 0$, daher $\text{rang}(A) = 3$. Für $u = -1$ ist
   $$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   folglich $\text{rang}(A) = 1$.

2. **Lösung.** Wir führen die Rechnungen zu (1) und (2) aus.

   (1) Die Matrix des Endomorphismus bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ ist
   $$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Daher folgt
   $$\det(\varphi) = \det\left(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
   (Die Zeile 2 ist null.)

(2) Wir wählen Basen $\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r\}$ in U und $\mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_s\}$ in W, dann ist $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_s\}$ eine Basis in V. Bezüglich $\mathcal{B}$ haben ψ_1 bzw. ψ_2 die Matrizen

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\psi_1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\psi_2) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & -2 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\det(\psi_1) = 0$ und $\det(\psi_2) = (-2)^s$.

4. **Lösung.**

(1) Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} f((0,-1),(0,-1)) &= -3 \\ f((0,-1),(-1,-2)) &= -4 \\ f((-1,-2),(0,-1)) &= -6 \\ f((-1,-2),(-1,-2)) &= -9\,; \end{aligned}$$

wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

(2) Entsprechend finden wir

$$B = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

(3) Die Übergangsmatrix ist

$$\mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. **Ergebnis.**

(2) $$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) Wir verwenden den symmetrischen gaußschen Algorithmus oder (ganz naiv) die Methode der quadratischen Ergänzung. So ergibt sich eine Basis

$$\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,-1,0),(2,1,-1)),$$

bezüglich der $\boldsymbol{q}$ die Diagonalmatrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{q}) = \mathrm{diag}(-1, 1, 11)$$

hat, d.h. $\boldsymbol{q}$ ist äquivalent zur quadratischen Form

$$-x_1^2 + x_2^2 + 11x_3^2\,.$$

Wer Lust dazu hat, kann durch Multiplikation der Basisvektoren mit Konstanten nun noch erreichen, dass die quadratische Form in die äquivalente Gestalt $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ transformiert wird.