Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 3 zum 9.5.05

1. Geben Sie für jede der folgenden reellen Matrizen A eine invertierbare Matrix U an, für die ${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U$ diagonal ist.

   (1) $$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (2) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   (3) $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   Welchen Rang und welche Signatur haben die entsprechenden quadratischen Formen?

2. Stellen Sie fest, welche der folgenden quadratischen Formen $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ positiv definit ist.

   (1) $\boldsymbol{q}(x,y,z) = -2x^2 + 4xy + 2xz - 2yz - 2z^2$

   (2) $\boldsymbol{q}(x,y,z) = -2x^2 - 6xy - 6xz + 3y^2 + 2yz - 2z^2$

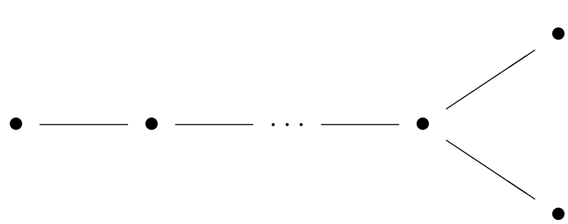
   (3) $\boldsymbol{q}(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + 2z^2$

3. * Ein Graph $\Gamma := (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ besteht aus einer (hier endlichen) Menge $\mathcal{E}$ von *Ecken* und einer Menge $\mathcal{K}$ zweielementiger Teilmengen von $\mathcal{E}$, den *Kanten*. Wir zeichnen ihn durch Angabe von Punkten (Ecken) und Verbindungslinien von Punkten (Kanten). Verwenden wir die Notation $\mathcal{E} = \{1, \ldots, n\}$, so lässt sich Γ eine quadratische Form $\boldsymbol{q}_\Gamma$ auf $\mathbb{R}^n$ zuordnen durch die Vorschrift

   $$\boldsymbol{q}_\Gamma(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} a_{ij} x_i x_j$$

   mit $a_{ii} := -2$ und $a_{ij} = a_{ji} := 1$ falls $\{i,j\} \in \mathcal{K}$; anderenfalls setzen wir $a_{ij} = a_{ji} := 0$.

   (1) Zeigen Sie, dass für die folgenden beiden Graphen mit jeweils n Ecken die quadratische Form $\boldsymbol{q}_\Gamma$ negativ definit ist (wobei im ersten Fall $n \geq 1$ und im zweiten $n \geq 4$ zu wählen ist).



[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

(2) Γ heißt zusammenhängend, falls sich zwei beliebige Ecken durch eine Folge von Kanten verbinden lassen.
Finden Sie alle zusammenhängenden Graphen Γ, für die $\boldsymbol{q}_\Gamma$ negativ definit ist.

4. Bestimmen Sie für die nichtausgeartete alternierende Bilinearform $\boldsymbol{b}$ auf dem Standardraum $\mathbb{R}^4$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert wird, eine symplektische Basis.

5. Zeigen Sie: Sind V, W und P Vektorräume, so existieren Isomorphismen (1) bzw. (2), die durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt sind.
   (1) $(V \bigoplus W) \otimes_K P \cong (V \otimes_K P) \bigoplus (W \otimes_K P), \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \otimes \boldsymbol{p} \mapsto (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p}, \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p})$
   (2) $\mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, P)) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes_K W, P)$;
   dabei wird $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, P))$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $V \otimes_K W \to P$ zugeordnet, die mittels der Tensorabbildung der bilinearen Abbildung
   $V \times W \to P,\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto (\psi(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{w})$ entspricht.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 3 zum 9.5.05

1. **Ergebnis.**

(1)
$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$
Es folgt $\operatorname{rang}(A) = 2$, und A hat die Signatur -2.

(2)
$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 144 \end{pmatrix},$$
$\operatorname{rang}(A) = 3$ und A hat die Signatur 1.

(3)
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$
$\operatorname{rang}(A) = 4$ und A hat die Signatur 0.

2. **Lösung.** Zunächst werden die zugehörigen symmetrischen Matrizen bestimmt. Wir erhalten in der Reihenfolge der angegebenen Fälle
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Nun wird geprüft, ob alle Hauptminoren positiv definit sind. Sobald ein Hauptminor ≤ 0 gefunden wird, ist $\boldsymbol{q}$ nicht positiv definit und die jeweilige Rechnung kann abgebrochen werden.

(1) Für die Matrix A ergibt sich
$$|-2| = -2,$$
$\boldsymbol{q}$ ist daher nicht positiv definit.

(2) Wir erhalten für die Matrix B
$$|-2| = -2,$$
also ist $\boldsymbol{q}$ nicht positiv definit.

(3) Entsprechend ergibt sich für C

$$|\,1\,| = 1,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

d.h. $\boldsymbol{q}$ ist positiv definit.

4. **Lösung.** Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}{\cdot}A{\cdot}{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y}$ die durch A definierte alternierende Form. Unter den Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_4$ der kanonischen Basis suchen wir zunächst ein Paar, für das $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) \neq 0$ ist. Offenbar ist dies bereits für $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = 4$ erfüllt. Wir setzen

$$\boldsymbol{b}_1 := \frac{1}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{4}(1,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{b}_2 := \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0).$$

Es ergibt sich eine Basis $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ des von $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ erzeugten Unterraumes, bezüglich der die Einschränkung von $\boldsymbol{b}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Nun wird als Komplementärraum zu $\mathbb{R}\boldsymbol{b}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{b}_2$ der Unterraum W aller Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ bestimmt, für die $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{x}) = 0$ ist. W ist in unserem Fall die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix aus den ersten beiden Zeilen von A besteht. Wir erhalten als Erzeugendensystem die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (1,1,0,2),$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (1,4,4,0).$$

Entsprechend wird nun

$$\boldsymbol{b}_3 := \frac{1}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4)}\cdot\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{4}(1,1,0,2),$$
$$\boldsymbol{b}_4 := \boldsymbol{v}_4 = (1,4,4,0)$$

gesetzt. Wir erhalten eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_4)$, für die $\boldsymbol{b}$ die Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{E}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, d.h. $\mathcal{B}$ ist symplektisch.