Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 4 zum 18.5.05

1. Bestimmen Sie die (reellen!) Eigenwerte der Matrix $A \in \mathrm{M}(4, \mathbb{R})$,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 & -6 \\ 0 & -10 & -11 & -10 \\ 0 & 10 & 11 & 10 \\ 1 & -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie für folgende Matrizen die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume (jeweils durch Angabe einer Basis).

   (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R})$

   (2) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{C})$

   (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2)$

3. $A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{C})$ sei eine komplexe Matrix. Beweisen Sie:

   (1) Falls A den Rang r hat, so besitzt A höchstens r von 0 verschiedene Eigenwerte (die mit der jeweiligen algebraischen Multiplizität gezählt werden).

   (2) Ist $r = 1$, so gilt: Der einzige eventuell von 0 verschiedene Eigenwert der Matrix A ist die Spur $\mathrm{tr}(A)$.

4. $\varphi : V \to V$ sei Endomorphismus des K-Vektorraumes V und $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

   (1) Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von φ, so ist λ^k Eigenwert des Endomorphismus φ^k.

   (2) Ist $\boldsymbol{x} \in V$ Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ, so ist $\boldsymbol{x}$ Eigenvektor von φ^k zum Eigenwert λ^k.

5. Zeigen Sie, dass die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 30 & 60 & -3 \end{pmatrix}$$
diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine reguläre Matrix U mit der Eigenschaft $D = U^{-1} \cdot A \cdot U$ an.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 4 zum 18.5.05

1. **Lösung.** Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom $f = \chi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ und erhalten

$$f = \det(X \cdot \mathrm{E}_4 - A) = \det \begin{pmatrix} X & 5 & 6 & 6 \\ 0 & X+10 & 11 & 10 \\ 0 & -10 & X-11 & -10 \\ -1 & 4 & 4 & X+5 \end{pmatrix}$$
$$= X^4 + 4X^3 + X^2 + 4X.$$

Eigenwerte der gegebenen Matrix sind die Nullstellen von f. Offensichtlich ist X ein Faktor von f, es verbleibt nur die Bestimmung der Nullstellen von $g = X^3 + 4X^2 + X + 4$. Eine können wir erraten: Einsetzen einiger ganzer Zahlen für X ergibt insbesondere $g(-4) = 0$, g ist daher durch den Linearfaktor $X + 4$ teilbar. Wir erhalten

$$f = X \cdot (X + 4) \cdot (X^2 + 1).$$

Da der letzte Faktor keine Nullstelle im Grundkörper $\mathbb{R}$ besitzt, ergeben sich für die Matrix A genau zwei Eigenwerte 0 und -4.

5. **Lösung.** Zunächst wird das charakteristische Polynom der gegebenen Matrix bestimmt. $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A)$ ist z.B. durch Entwicklung nach der letzten Spalte zu ermitteln.

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} X+9 & 12 & 0 \\ -6 & X-9 & 0 \\ -30 & -60 & X+3 \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} X+9 & 12 \\ -6 & X-9 \end{pmatrix} \cdot (X+3)$$
$$= (X-3) \cdot (X+3)^2$$

Nullstellen sind die Eigenwerte 3 und -3 der Matrix A.

Zur Bestimmung des Eigenraumes zum Eigenwert $\lambda = 3$ haben wir das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\lambda \cdot E_3 - A$, d.h. das System

$$\begin{aligned} 12x_1 + 12x_2 &= 0 \\ -6x_1 - 6x_2 &= 0 \\ -30x_1 - 60x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Eine Basis seines eindimensionalen Lösungsraumes ist der Vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1, 5)$. (Es genügt hier, einen von Null verschiedenen Lösungsvektor zu erraten, da $\dim(V_3) = 1$ von vornherein klar ist.)

Entsprechend ergibt sich zum Eigenwert $\lambda = -3$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 6x_1 + 12x_2 &= 0 \\ -6x_1 - 12x_2 &= 0 \\ -30x_1 - 60x_2 &= 0 \end{aligned}$$

für den Eigenraum V_{-3}; mit dem gaußschen Algorithmus finden wir eine Basis $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = ((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$. Folglich hat der Eigenwert $\lambda = -3$ die geometrische

Multiplizität 2. Da für beide Eigenwerte algebraische und geometrische Multiplizität übereinstimmen, ist A diagonalisierbar. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ zur kanonischen Basis erhalten wir ohne weitere Rechnung die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U$$

in der Ähnlichkeitsklasse von A.

Anmerkung. Geschicktes Rechnen kann den Aufwand beträchtlich verringern. So ist es beispielsweise nach der Bestimmung von χ_A schon klar, dass der Eigenraum V_{-3} nur die Dimension 1 oder 2 haben kann. $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ ist offensichtlich ein Eigenvektor der gegebenen Matrix A. Lässt sich ein weiterer Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -3$ erraten, der kein Vielfaches von $\boldsymbol{e}_3$ ist, so ist damit bereits eine Basis für V_{-3} gefunden. Im vorliegenden Beispiel wäre dies mit $\boldsymbol{v}_2 = (-2, 1, 0)$ nicht besonders schwierig gewesen.