Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 5 zum 23.5.05

1. V sei der Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, der von den Abbildungen 1, $\sin(x)$, $\cos(x)$ erzeugt wird.
   (1) Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3$.
   (2) Es sei $\varphi : V \to V$ der lineare Endomorphismus $f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)$ von V, der durch die Ableitung definiert wird. Ist φ diagonalisierbar?

2. Trigonalisieren Sie die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix},$$
d.h. geben Sie eine obere Dreiecksmatrix B sowie eine reguläre Matrix U an, für die $B = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.

3. Untersuchen Sie, ob die folgende Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{F}_2)$ halbeinfach ist.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Überprüfen Sie, dass die folgende Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$$
nilpotent ist und geben Sie ihre Normalform B, sowie eine reguläre Matrix U an, für die $B = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.

5. φ sei ein Endomorphismus des n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes V mit der Eigenschaft
$$\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(\varphi^2) = \ldots = \mathrm{tr}(\varphi^n) = 0,$$
wobei $\mathrm{tr}(\varphi^t)$ die Spur des Endomorphismus φ^t bezeichnet.
Beweisen Sie: φ ist nilpotent.

---
[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 5 zum 23.5.05

2. **Lösung.** Zur Trigonalisierung der Matrix A berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A)$. Es ist $\chi_A = (X+5)^3$ (daraus folgt, dass A trigonalisierbar, nicht jedoch diagonalisierbar ist, denn die Ähnlichkeitsklasse einer Matrix $\lambda \cdot E_n$ ist einelementig). Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda = -5$ haben wir das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\lambda \cdot E_3 - A$, d.h. das System

$$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir finden als Basis seines eindimensionalen Lösungsraumes einen Vektor $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 2)$.

Wird mit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der Endomorphismus des Standardraumes bezeichnet, der durch $M(\varphi) = A$ definiert ist, so gilt zunächst $\varphi(\boldsymbol{v}_1) = \lambda \cdot \boldsymbol{v}_1$. Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir $\boldsymbol{v}_1$ zu einer Basis $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ ergänzen, für die die dritte Koordinate des Vektors $\varphi(\boldsymbol{v}_2)$ verschwindet.

Zunächst kann einer der Vektoren der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ durch den hier gefundenen Vektor $\boldsymbol{v}_1$ ersetzt werden, so dass wiederum eine Basis entsteht; wir wählen $\mathcal{B}_1 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Mit diesen Vektoren als Spalten ergibt sich eine Übergangsmatrix

$$U_1 := U_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und so eine zu A ähnliche Matrix

$$A_1 = U_1^{-1} \cdot A \cdot U_1 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Die Teilmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{R})$$

der Matrix A hat als einzigen Eigenwert ebenfalls $\lambda = -5$. Lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$(\lambda \cdot E_2 - A') \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir für A' einen Eigenvektor $(-1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Wählen wir Vektoren $\boldsymbol{v}_2$ mit den Koordinaten $(0, -1, 2)$ und $\boldsymbol{v}_3$ mit Koordinaten $(0, 0, 1)$ (bezüglich $\mathcal{B}_1$), so entsteht eine neue Basis $\mathcal{B}_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ des Standardraumes $\mathbb{R}^3$, für die $M_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Mit der Übergangsmatrix

$$U_2 := U_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$M_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = U_2^{-1}\cdot A_1\cdot U_2 = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix};$$

diese Matrix ist eine Trigonalisierung von A, d.h.

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = U^{-1}\cdot A\cdot U$$

mit

$$U = U_1\cdot U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Lösung.** Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom $f = \chi_A(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ und erhalten

$$\begin{aligned} f = \det \begin{pmatrix} X & 1 & 1 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & X+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & X+1 \end{pmatrix} \\ = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\,. \end{aligned}$$

Um festzustellen, ob f mehrfache Nullstellen besitzt, wird der größte gemeinsame Teiler von f und der Ableitung f' von f bestimmt. Es ist

$$f' = X^2 + 1\,.$$

Offensichtlich ist $f' = (X+1)^2$, daher existiert wegen $f(1) \neq 0$ kein gemeinsamer irreduzibler Faktor mit f. Aus $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$ folgt, dass f keine mehrfachen Nullstellen in den Erweiterungskörpern von $\mathbb{F}_2$ besitzt. In einem Zerfällungskörper des Polynoms f hat die Matrix A daher 4 verschiedene Eigenwerte, ist also halbeinfach.

4. **Lösung.** Offensichtlich ist

$$A \neq 0, \quad A^2 = 0, \quad \mathrm{rang}(A) = 2,$$

daher muss A die Normalform haben, die der Partition $(2,2)$ von 4 entspricht.

Zur Bestimmung der zyklischen Vektoren berechnen wir zunächst den Kern $K = \ker(\varphi)$ der zugehörigen linearen Abbildung, der durch die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A gegeben ist. $((4,-1,0,2),(-1,1,1,0))$ ist eine Basis von K; diese wird durch die Vektoren $\boldsymbol{w}_{11} = (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{w}_{12} = (0,1,0,0)$ der kanonischen Basis zu einer Basis von V ergänzt.

Zusammen mit $\boldsymbol{w}_{21} = \varphi(\boldsymbol{w}_{11}) = (-3,0,-1,-2)$ und $\boldsymbol{w}_{22} = \varphi(\boldsymbol{w}_{12}) = (-4,-2,-4,-4)$ entsteht eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_{11}, \boldsymbol{w}_{21}, \boldsymbol{w}_{12}, \boldsymbol{w}_{22})$ von V, bezüglich der $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die gesuchte Normalform B annimmt. Werden die Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Spalten einer Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

angeordnet, so erhalten wir durch

$$B = U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Normalform von A.