

# Übungsaufgaben<sup>1</sup> Lineare Algebra und analytische Geometrie II\*

## Serie 6 zum 30.5.05

1. Klassifizieren Sie alle nilpotenten Matrizen  $A \in M(6; \mathbb{C})$  mit  $\text{rang}(A) = 3$  bis auf Ähnlichkeit.

2.\* Wir fixieren einen endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$ .

(1)  $\varphi$  sei ein nilpotenter Endomorphismus von  $V$  sowie  $(\mathbf{v}_{11}, \dots, \mathbf{v}_{1q})$  eine Basis von  $\ker(\varphi)$ . Zu jedem der Vektoren  $\mathbf{v}_{1j}$  wird für  $i = 1, 2, \dots$  eine Kette von Vektoren  $\mathbf{v}_{ij}$  gewählt, für die  $\varphi(\mathbf{v}_{i+1,j}) = \mathbf{v}_{ij}$  ist (dies entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wenn  $\varphi$  durch eine Matrix beschrieben wird).

Zeigen Sie, dass  $(\mathbf{v}_{1j}, \dots, \mathbf{v}_{ij})$  ein linear unabhängiges System ist und das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.

Überdies ist die Familie aller so aufgefundenen Vektoren  $\mathbf{v}_{ij}$  linear unabhängig.

(2) Wenn die unter (1) gefundene linear unabhängige Familie  $(\mathbf{v}_{ij})_{i,j}$  aus  $\dim(V)$  Vektoren besteht, d.h. eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  bildet, so erhalten wir (bei geeigneter Anordnung der Vektoren) als zugehörige Matrix  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  die jordanische Normalform.

(3) Zeigen Sie, dass die jordanische Normalform eines nilpotenten Endomorphismus nicht immer so gefunden werden kann.

(4) Erläutern Sie, wie sich aus dem Verfahren (1) im folgenden Spezialfall dennoch eine Methode ergibt, die jordanische Normalform eines Endomorphismus zu bestimmen: Das charakteristische Polynom zerfällt in (bekannte) Linearfaktoren, und sämtliche Eigenwerte haben die geometrische Multiplizität 1.

3. Bestimmen Sie die jordanische Normalform  $J$  der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie eine Matrix  $U \in \text{GL}(4; \mathbb{R})$  für die  $U^{-1} \cdot A \cdot U = J$  ist.

**Anmerkung.** Das charakteristische Polynom ist ein Quadrat, seine Nullstellen sind reell.

4.  $V \neq \mathbf{0}$  bezeichnet einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum und  $\varphi$  einen Endomorphismus von  $V$  mit der Eigenschaft

$$\varphi^4(\mathbf{x}) = -11\varphi^3(\mathbf{x}) - 40\varphi^2(\mathbf{x}) - 48\varphi(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in V.$$

Geben Sie alle möglichen jordanischen Normalformen für  $\varphi$  an!

<sup>1</sup> Ein \* weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell

Online-Version: <http://www.math.hu-berlin.de/~roczzen/software/la.htm>

5. Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 10 & -8 \\ -4 & -6 & 6 & -8 \\ -4 & -2 & 5 & -4 \\ 3 & 11 & -8 & 10 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom  $m_A$  von  $A$ , indem Sie untersuchen, ob kleine Potenzen der Matrix linear abhängig sind.
- (2) Ist  $A$  halbeinfach?

**Lineare Algebra und analytische Geometrie II\***  
**Lösungsblatt der Aufgabenserie 6 zum 30.5.05**

3. **Lösung.** Den (bezüglich der Standardbasis) zu  $A$  gehörigen Endomorphismus des Standardraumes  $\mathbb{R}^4$  bezeichnen wir mit  $\varphi$ .

Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X \cdot E_4 - A) = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4 = (X^2 - 3X + 2)^2$$

erhalten wir die (sämtlich reellen) Eigenwerte  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 1$  der Matrix  $A$ , die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes  $H_1 := H(\varphi, \lambda_1)$  lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum  $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id}) \subseteq H_1$  beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$$

erzeugt, d.h.  $\mathbf{v}_2$  ist ein Eigenvektor von  $A$  bezüglich  $\lambda_1$ . Nun muss wegen  $\dim(H_1) = 2$  jeder Urbildvektor  $\mathbf{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id})^{-1}(\mathbf{v}_2)$  zusammen mit  $\mathbf{v}_2$  eine Kette  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  zyklischer Vektoren für  $H_1$  bilden (Beweis?). Wir finden

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 3, -2, 0)$$

als Lösung von

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\mathbf{v}_3 = (4, -3, 1, 0)$$

$$\mathbf{v}_4 = (0, 2, -2, 4)$$

für  $H(\varphi, \lambda_2)$  als Lösungen der Gleichungssysteme  $(A - \lambda_2 \cdot E_4) \cdot {}^t\mathbf{v}_4 = 0$  ( $\mathbf{v}_4 \neq \mathbf{0}$ ) und  $(A - \lambda_2 \cdot E_4) \cdot {}^t\mathbf{v}_3 = {}^t\mathbf{v}_4$ . Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  und  $\mathbf{v}_4$  gebildet werden, erhalten wir

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit  $U^{-1} \cdot A \cdot U = J$  als jordansche Normalform der Matrix  $A$ .

4. **Hinweis zur Lösung.** Eine offensichtlich äquivalente Umformung der Voraussetzung ergibt

$$\varphi^4(\mathbf{x}) + 11\varphi^3(\mathbf{x}) + 40\varphi^2(\mathbf{x}) + 48\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ für alle } \mathbf{x} \in V.$$

Bezeichnet nun

$$f := X^4 + 11X^3 + 40X^2 + 48X \in \mathbb{C}[X]$$

das aus den Koeffizienten dieser Bedingung gebildete Polynom, so ist  $f(\varphi)$  die Nullabbildung im Endomorphismenring  $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ . Daher ist  $f$  durch das Minimalpolynom  $m_{\varphi}$  von  $\varphi$  teilbar.

Um die Aufgabe zu lösen, fehlt uns nur noch die Faktorzerlegung von  $f$ , aus der wir die infrage kommenden Linearfaktoren des Polynoms  $m_{\varphi}$  ablesen können. Wir erraten die Nullstelle  $-3$  von  $f$  und erhalten

$$f = X \cdot (X + 3) \cdot (X + 4)^2.$$

Was bleibt, sollte klar sein ...

5. **Lösung.** Offensichtlich ist  $m_A$  nicht linear ( $A$  ist keine Diagonalmatrix).

Nun testen wir, ob  $m_A$  quadratisch ist; dann muss  $A^2$  plus ein (geeignetes) Vielfaches  $u \cdot A$  von  $A$  diagonal sein.  $A^2 + u \cdot A = v \cdot E_4$  entspricht einem einfach auszuwertenden System linearer Gleichungen für  $u$  und  $v$ ; wir schreiben einzelne davon auf und testen durch Einsetzen, ob die Bedingung erfüllt ist. Leicht zeigt sich, dass dies für  $u = -3$  der Fall ist, dann ist weiter  $v = -10$ .

Wir haben so ein nichtkonstantes Polynom  $f = X^2 - 3X + 10 \in \mathbb{R}[X]$  minimalen Grades mit  $f(A) = 0$  gefunden. Da  $f$  normiert ist, folgt  $f = m_A$ ; dies ist die Antwort auf Frage (1).

Leicht ist zu sehen, dass  $m_A$  keine mehrfache Nullstelle in  $\mathbb{C}$  besitzt, daher ist  $A$  eine halbeinfache Matrix.