Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 7 zum 6.6.05

1.* Mit U, V und W werden endlichdimensionale K-Vektorräume der Dimensionen p, n bzw. q bezeichnet. Weiter sei

$$\mathbf{0} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \mathbf{0}$$

eine exakte Folge. Beweisen Sie:

(1) Es existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$\Gamma : \Lambda^p(U) \otimes_K \Lambda^q(W) \to \Lambda^n(V)$, für die

$$\Gamma((\boldsymbol{u}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{u}_p) \otimes (\boldsymbol{w}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}_q)) = \varphi(\boldsymbol{u}_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(\boldsymbol{u}_p) \wedge \boldsymbol{w}'_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}'_q$$

ist, wenn $\boldsymbol{u}_i \in U$ und $\boldsymbol{w}_j \in W$ sind sowie $\boldsymbol{w}'_j \in V$ Vektoren bezeichnen, so dass $\psi(\boldsymbol{w}'_j) = \boldsymbol{w}_j$ gilt.

(2) Der unter (1) gefundene Homomorphismus Γ ist ein Isomorphismus.

2. Wir betrachten den reellen Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

(1) Geben Sie die Basen $\Lambda^1\mathcal{B}$, $\Lambda^2\mathcal{B}$ und $\Lambda^3\mathcal{B}$ für die Vektorräume $\Lambda^1(V)$, $\Lambda^2(V)$ bzw. $\Lambda^3(V)$ an.

(2) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der jeweiligen Basis $\Lambda^i\mathcal{B}$, und zwar für

a) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2$, wobei $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{x}_2 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$,

und für

b) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3$, wobei $\boldsymbol{x}_1 = -\boldsymbol{e}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}_2 = -2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{x}_3 = -\boldsymbol{e}_1 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_3$.

3. Bestimmen Sie die folgenden äußeren Potenzen, und zwar

(1) $\Lambda^2(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ sowie}$$

(2) $\Lambda^3(B)$ für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie die Normalform einer Präsentationsmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2).$$

5. Es sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix. Beweisen Sie, dass für jede Zahl $m \in \mathbb{Z}$ ein Polynom $f_m \in \mathbb{C}[X]$ existiert mit $\deg(f_m) \leq n - 1$, so dass $A^m = f_m(A)$ ist.

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 7 zum 6.6.05

2. **Ergebnis.**

(1) $$\Lambda^1\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$
$$\Lambda^2\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3)$$
$$\Lambda^3\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3).$$

(2) Wir erhalten durch Ausmultiplizieren

a) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2$
$$\begin{aligned}
&= 2\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 + 2\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - 2\cdot \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 - 2\cdot \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\
&= 0 + 2\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - 2\cdot \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 + 0 - \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\
&= 2\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - 2\cdot \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\
&= 2\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + 2\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\
&= 4\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3$
$$\begin{aligned}
&= -4\cdot \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 \\
&= (4+1)\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\
&= 5\cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}$$

womit in jedem Fall das Koordinatentupel aus den entsprechenden Koeffizienten der Basisvektoren abgelesen werden kann.

3. **Ergebnis.**

(1) $$\Lambda^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) $$\Lambda^3(B) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. **Lösung.** Die charakteristische Matrix ist
$$X\cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X+1 & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, \mathbb{F}_2[X]).$$
Nach Vertauschen der ersten beiden Zeilen entsteht eine Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 1 & X+1 & 1 \\ X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix},$$
die an der Position $(1,1)$ einen von 0 verschiedenen Eintrag minimalen Grades besitzt. Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile von den übrigen ergibt sich daraus eine Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & X+1 & 1 \\ 0 & X^2+X+1 & X+1 \\ 0 & X & X+1 \end{pmatrix},$$
deren erste Spalte bereits die gewünschte Gestalt hat. Sie ist offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2+X+1 & X+1 \\ 0 & X & X+1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{e}_1(A) = 1$ muss die Teilmatrix

$$C = \begin{pmatrix} X^2+X+1 & X+1 \\ X & X+1 \end{pmatrix} \quad \text{zur Matrix} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}_2(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_3(A) \end{pmatrix}$$

äquivalent sein. Anstatt den obigen Algorithmus fortzusetzen, lassen sich in diesem besonders einfachen Fall auch die größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{d}_3(A)$ und $\mathrm{d}_2(A)$ der äußeren Potenzen $\Lambda^i(C)$ $(\, i = 2, 1\,)$ schnell bestimmen: Dies sind im ersten Fall die Determinante und im zweiten der ggT aller Einträge von C. So ergeben sich

$$\mathrm{e}_3(A) = \frac{\mathrm{d}_3(A)}{\mathrm{d}_2(A)} = \; X^3+X^2+X+1\,, \quad \mathrm{e}_2(A) = \mathrm{d}_2(A) = \; 1$$

und damit die gesuchte Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X^3+X^2+X+1 \end{pmatrix}$$

der Präsentationsmatrix für A.