Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 8 zum 13.6.05

1. Zeigen Sie, dass die jordanschen Normalformen einer komplexen Matrix A und ihrer transponierten Matrix ${}^{t}A$ übereinstimmen.

2. Bestimmen Sie die Jordanzerlegung Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{F}_7).$$

3. $Y = P + \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w} \subseteq \mathbb{R}^4$ sei eine Parameterdarstellung der Ebene Y im 4-dimensionalen affinen Standardraum, die durch
$$P = (-1, 3, -2, 1)\,,\ \boldsymbol{v} = (-1, -3, -2, 2)\,,\ \boldsymbol{w} = (2, 2, 0, 3)$$
gegeben wird. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.

4. Im affinen Raum A sind die Geraden G, H gegeben, für die $G \cap H = \{P\}$ ein Punkt ist sowie Punkte $A_1, A_2, A_3 \in G$, $B_1, B_2, B_3 \in H$ mit $A_i \neq P$, $B_j \neq P$ für $i, j = 1 \ldots 3$.
Wir setzen voraus $A_1 \vee B_2 \parallel A_2 \vee B_1$ und $A_2 \vee B_3 \parallel A_3 \vee B_2$. Zeigen Sie, dass dann $A_1 \vee B_3 \parallel A_3 \vee B_1$ gilt.

5. $A := (\mathbb{F}_2)^3$ sei der affine Standardraum über dem zweielementigen Körper $\mathbb{F}_2$.
   (1) Wieviele Punkte hat A?
   (2) Wieviele Geraden enthält A?
   (3) Wieviele Ebenen enthält A?

Hinweis.

Am 8.6.05, 13.15 - 14.45 findet die Klausur statt.

Schwerpunkt: Endomorphismen von Vektorräumen
(Kap. 5 der Vorlesung)

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 8 zum 13.6.05

2. **Lösung.** Mit $\mathbb{F}$ bezeichnen wir den Zerfällungskörper des charakteristischen Polynoms der gegebenen Matrix, mit φ den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{F}^4$.
Nun wird A (über $\mathbb{F}$) durch eine Ähnlichkeitstransformation in die jordansche Normalform überführt. Dazu bestimmen wir zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A = \det(X{\cdot}E_4 - A) = X^4 + 2X^2 + 1$. Seine Nullstellen liegen offensichtlich nicht in $\mathbb{F}_7$. Es ist aber leicht, den Zerfällungskörper anzugeben; wir erhalten ihn als $\mathbb{F} = \mathbb{F}_7[i]$, wobei i ein algebraisches Element mit dem Minimalpolynom X^2+1 bezeichnet (dieses Polynom ist über $\mathbb{F}_7$ irreduzibel). Nun ergeben sich für φ die Eigenwerte $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} (i-3) & 3 & -3 & 3 \\ 1 & (i+1) & 3 & 0 \\ -2 & -3 & (i+2) & 2 \\ -3 & 1 & 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = (1, -(i-3), -(3i-3), 1)$$

erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 {\cdot} \mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\boldsymbol{v}_1 = ((2i-2), -(i-2), (i+3), 0)$$

als Lösung von

$$\begin{pmatrix} (i-3) & 3 & -3 & 3 \\ 1 & (i+1) & 3 & 0 \\ -2 & -3 & (i+2) & 2 \\ -3 & 1 & 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(i-3) \\ -(3i-3) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (-(2i+2), (i+2), -(i-3), 0)$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (1, (i+3), (3i+3), 1)$$

für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 {\cdot} \mathrm{E}_4) {\cdot} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \mathbf{0}$) und $(A - \lambda_2 {\cdot} \mathrm{E}_4) {\cdot} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} (2i-2) & 1 & -(2i+2) & 1 \\ -(i-2) & -(i-3) & (i+2) & (i+3) \\ (i+3) & -(3i-3) & -(i-3) & (3i+3) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die jordansche Normalform $U^{-1} {\cdot} A {\cdot} U = G + F$ der Matrix A über $\mathbb{F}$ mit

$$G=\begin{pmatrix}-i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&i\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

G ist eine halbeinfache Matrix, F nilpotent sowie $F\cdot G=G\cdot F$.
Mit $B=U\cdot G\cdot U^{-1}$ und $N=U\cdot F\cdot U^{-1}$,

$$B=\begin{pmatrix}-1&-1&3&2\\2&0&1&1\\3&-3&2&-3\\-1&-3&-1&-1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}-2&-3&1&1\\-1&1&2&-1\\2&0&0&-2\\-2&-3&1&1\end{pmatrix}$$

erhalten wir eine Jordanzerlegung für A, d.h. $A=B+N$, wobei B halbeinfach, N nilpotent und $B\cdot N=N\cdot B$ ist.
Wir sehen überdies, dass die Matrizen B, N in $\mathrm{M}(4;\mathbb{F}_7)$ liegen.

3. **Lösung.** Ist $U:=\mathrm{T}(Y)=\mathbb{R}\boldsymbol{v}+\mathbb{R}\boldsymbol{w}$ der Translationsraum von Y, so gilt $U=W^{\perp}$, wobei W den Raum derjenigen Linearformen auf $\mathbb{R}^4$ bezeichnet, die auf U verschwinden,

$$W=\{\boldsymbol{u}\in(\mathbb{R}^4)^*\mid\ <\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>=<\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}>=0\}\,.$$

Schreiben wir (x_1,x_2,x_3,x_4) für das Koordinatenquadrupel eines Vektors $\boldsymbol{u}\in(\mathbb{R}^4)^*$ bezüglich der dualen Basis $(\boldsymbol{e}_1^*,\ldots,\boldsymbol{e}_4^*)$, so ist die Bedingung $\boldsymbol{u}\in W$ dazu äquivalent, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}-1&-3&-2&2\\2&2&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Eine zeilenäquivalente Umformung der Koeffizientenmatrix ergibt die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix}-1&-3&-2&2\\0&-4&-4&7\end{pmatrix},$$

aus der sich eine Basis $((1,-1,1,0),(-13,7,0,4))$ der Lösungsmenge ablesen lässt. Bezeichnet A die Matrix mit diesen Zeilen, so ist $Ax=A\cdot{}^{\mathrm{t}}P$ ein Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge den Punkt $P\in Y$ enthält und dessen zugehöriges homogenes System die Lösungsmenge $\mathrm{T}(Y)=U$ besitzt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}x_1-x_2+x_3&=-6\\-13x_1+7x_2+4x_4&=38\end{aligned}$$

als lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.