

# Übungsaufgaben<sup>1</sup> Lineare Algebra und analytische Geometrie II\*

## Serie 9 zum 20.6.05

1. Wir betrachten den affinen Standardraum  $X = \mathbb{R}^3$ .

(1) Zeigen Sie:  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$  mit

$$P_0 := (1, 1, 0), P_1 := (1, 2, 1), P_2 := (2, 3, 1), P_3 := (2, 3, 3)$$

ist eine affine Basis von  $X$ .

(2) Durch  $2x + 3y - 4z = 3$  wird eine Ebene  $E$  in  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Bestimmen Sie eine Gleichung für  $E$  im Koordinatensystem  $\mathcal{B}$ .

2. Bestimmen Sie eine Hauptachsenform für das reelle quadratische Polynom

$$f = X_1^2 + 2X_1X_2 + 5X_2^2 - 4X_1X_3 - 12X_2X_3 + 8X_3^2 - 2X_3 + 10$$

und geben Sie die zugehörige affine Transformation der Unbestimmten an.

3. Es sei  $X$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ , dessen Charakteristik von 2 verschieden ist,  $f : X \rightarrow X$  eine affine Abbildung sowie  $P, Q \in X$  verschiedene Punkte, für die  $f(P) = Q$  und  $f(Q) = P$  gilt.

Beweisen Sie, dass  $f$  einen Fixpunkt besitzt.

4.  $X$  und  $X'$  seien affine Räume,  $(P_i)_{i \in I}$  eine affine Basis von  $X$  und  $(P'_i)_{i \in I}$  eine Familie von Punkten aus  $X'$ .  $f$  sei die eindeutig bestimmte affine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  mit  $f(P_i) = P'_i$  für alle  $i \in I$ .

Beweisen Sie:  $f$  ist genau dann injektiv, wenn  $(P'_i)_{i \in I}$  eine affin unabhängige Familie in  $X'$  ist.

5.  $A \in M(m, n; K)$  bezeichnet eine Matrix,  $P_i := Z_i(A)$  ihre  $i$ -te Zeile, betrachtet als Punkt im affinen Standardraum  $K^n$  über dem Körper  $K$ .

Beweisen Sie:

$$\text{rang}(A) - 1 \leq \dim(P_1 \vee \dots \vee P_m) \leq \text{rang}(A).$$

---

<sup>1</sup> Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell  
Online-Version: <http://www.math.hu-berlin.de/~roczzen/software/la.htm>

**Lineare Algebra und analytische Geometrie II\***  
**Lösungsblatt der Aufgabenserie 9 zum 20.6.05**

2. **Lösung.** Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} f &= (X_1 + X_2 - 2X_3)^2 + 4X_2^2 - 8X_2X_3 + 4X_3^2 - 2X_3 + 10 \\ &= (X_1 + X_2 - 2X_3)^2 + (2X_2 - 2X_3)^2 - 2X_3 + 10, \end{aligned}$$

d.h. mittels der Substitution

$$Y_1 := X_1 + X_2 - 2X_3, \quad Y_2 := 2X_2 - 2X_3, \quad Y_3 := X_3$$

bekommt das gegebene Polynom die folgende Gestalt

$$f = Y_1^2 + Y_2^2 - 2Y_3 + 10.$$

Daraus ergibt sich nach Transformation des Koordinatenursprungs mittels

$$Z_1 := Y_1, \quad Z_2 := Y_2, \quad Z_3 := Y_3 - 5$$

offensichtlich

$$f = Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_3.$$

Dies ist bereits die Hauptachsenform. Durch Einsetzen erhalten wir die zugehörige affine Transformationen

$$Z_1 = X_1 + X_2 - 2X_3, \quad Z_2 = 2X_2 - 2X_3, \quad Z_3 = X_3 - 5.$$

**Anmerkung.** Das Verfahren gestaltet sich im vorliegenden Fall besonders einfach, da in den Teilschritten Monome vom Typ  $X_i^2$  auftreten. Anderenfalls kann analog vorgegangen werden, nachdem beispielsweise zunächst ein Term  $X_1X_2$  durch die Transformation  $X_1 = Y_1 + Y_2$ ,  $X_2 = Y_2$  in eine entsprechende Form gebracht wird.