

Übungsaufgaben¹ Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 10 zum 27.6.05

1. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei ein euklidischer Vektorraum mit der durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ gegebenen Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie: Für $x, y \in V$ gilt $\|x\| = \|y\|$ genau dann, wenn $(x-y) \perp (x+y)$ ist. Interpretieren Sie diese Aussage als *Satz des Thales*.

2. $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ sei eine Orthogonalbasis im euklidischen Vektorraum V und $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein beliebiger Vektor.

Beweisen Sie: Ist α_i der Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{b}_i$, so gilt

$$\cos^2(\alpha_1) + \dots + \cos^2(\alpha_n) = 1.$$

3. P_n sei der unitäre Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$\langle f, g \rangle := \bar{a}_0 b_0 + \bar{a}_1 b_1 + \dots + \bar{a}_n b_n$$

definiert ist, wobei $f, g \in P_n$ Polynome

$$f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

$$g = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n \in P_n, \quad b_i \in \mathbb{C}$$

bezeichnen.

Bestimmen Sie jeweils den orthogonalen Unterraum für

- (1) den Unterraum der Polynome f mit $f(1) = 0$,
- (2) den Unterraum $\mathbb{C} \cdot X^n$.

4. Verwenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt zur Bestimmung einer Orthonormalbasis des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$, deren Fahne mit der Fahne der folgenden Basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ übereinstimmt;

$$\mathbf{v}_1 = (-3, -1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -1, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, -2, -2).$$

- 5.* P_n sei der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ und $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Wir definieren eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_a: P_n \times P_n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\langle f, g \rangle_a = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) g^{(k)}(a),$$

wobei $f^{(k)}(a)$ die k -Ableitung des Polynoms f an der Stelle a bezeichnet.

Ist $\langle f, g \rangle_a$ ein Skalarprodukt?

¹ Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 10 zum 27.6.05

4. **Lösung.** Wir orthogonalisieren zunächst die gegebene Basis. Dazu wird $\mathbf{b}_1 := \mathbf{v}_1$ gewählt und $\mathbf{b}_2 := x_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{v}_2$ als Vektor, für den $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = 0$ ist, d.h.

$$x_1 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle + \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \quad \text{mit} \quad \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = 11, \quad \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -6.$$

Es folgt $x_1 = \frac{6}{11}$, und Einsetzen ergibt $\mathbf{b}_2 = (\frac{4}{11}, -\frac{17}{11}, -\frac{5}{11})$.

Analog werden $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gewählt, für die

$$\mathbf{b}_3 = y_1 \mathbf{b}_1 + y_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{v}_3, \quad \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle = 0$$

ist, daher

$$y_1 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle + \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = y_2 \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle + \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0.$$

Aus

$$\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = -3, \quad \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle = \frac{30}{11}, \quad \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{48}{11}$$

erhalten wir

$$y_1 = \frac{3}{11}, \quad y_2 = -\frac{8}{5}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich der dritte Basisvektor $\mathbf{b}_3 = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -1)$.

Abschließend wird die gefundene Orthogonalbasis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ durch Multiplikation mit Konstanten normiert; wir erhalten z.B. die Orthonormalbasis

$$\left(\frac{1}{\sqrt{11}} (-3, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{330}} (-4, 17, 5), \frac{1}{\sqrt{30}} (2, -1, 5) \right).$$

Anmerkung. Vor dem Normieren kann ein Vektor mit einem beliebigen Faktor ($\neq 0$) multipliziert werden; auf diese Weise wird das Rechnen mit Brüchen oder gemeinsamen Faktoren der Komponenten weitgehend überflüssig!