Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 11 zum 4.7.05

1. Für die folgenden Matrizen A, B ist jeweils eine Orthonormalbasis des euklidischen Standardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ zu finden, die aus Eigenvektoren besteht.

(1) $$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 10 & -14 \\ 10 & 10 & 4 \\ -14 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

(2) $$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 2 \\ -4 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

2. P_2 sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt, das für
$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2\,, \quad g = b_0 + b_1X + b_2X^2\,, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$
durch
$$< f, g >= \ a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$
definiert ist. Wir bezeichnen mit
$$\varphi : \mathrm{P}_2 \longrightarrow \mathrm{P}_2\,, \quad f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}$$
den Ableitungsoperator und mit $\varphi^\star$ seinen adjungierten Endomorphismus.
   (1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (f_1,\ f_2\,, f_3)$ mit
   $$f_1 = -2X^2 - X - 2,\ f_2 = 3X^2 - X,\ f_3 = -X - 1$$
   eine Basis von P_2 ist.
   (2) Bestimmen Sie die Matrix von $\varphi^\star$ bezüglich $\mathcal{B}$.

3. Wir betrachten die euklidische Ebene E.
   (1) Zeigen Sie: Sind φ und ψ Spiegelungen von E, so ist $\varphi \cdot \psi$ eine Drehung.
   (2) Wir beziehen uns nun auf eine fest gewählte Orthonormalbasis und die durch sie gegebene Orientierung.
   φ sei die Spiegelung an der Geraden, die gegen die erste Koordinatenachse um den Winkel $\frac{\pi}{6}$ geneigt ist, ψ die Spiegelung an der Geraden, die gegen die erste Koordinatenachse um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ geneigt ist.
   Welchen Drehwinkel hat $\varphi \cdot \psi$?

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

4. Geben Sie für das quadratische Polynom

$$f = 2X_1^2 - 8X_1X_2 + 8X_2^2 - 3X_1 + X_2 + 5 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$$

eine Bewegung der affinen euklidischen Standardebene an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

5. (1) V sei ein unitärer Vektorraum, $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, $\varphi^\star$ der adjungierte. Zeigen Sie: $\ker(\varphi^\star) \textcircled{\perp} \operatorname{im}(\varphi) = V$.

   (2) Nun sei $A \in \mathrm{M}(m, n; \mathbb{C})$, $b \in \mathrm{M}(m, 1, \mathbb{C})$. Beweisen Sie: Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn b zum Lösungsraum von ${}^{\mathrm{t}}\overline{A} \cdot x = 0$ orthogonal ist.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 11 zum 4.7.05

1. **Lösung.**

(1) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte der Matrix A; sie ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X \cdot \mathrm{E}_3 - A) = (X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+2)\,,$$

das wir (um unnötige Brüche zu vermeiden) zweckmäßig mittels

$$9^3 \cdot \chi_A = \det\begin{pmatrix} 9X-1 & -10 & 14 \\ -10 & 9X-10 & -4 \\ 14 & -4 & 9X+2 \end{pmatrix}$$
$$= X^3 - X^2 - 4X + 4$$

berechnet haben. Die Nullstellen sind paarweise verschieden, d.h. jeder der Eigenräume ist eindimensional. Daher genügt es, für jeden Eigenwert λ einen von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vektor im Lösungsraum des entsprechenden homogenen linearen Gleichungssystems zu wählen und zu normieren. So finden wir eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(-2,-2,1), \frac{1}{3}(1,-2,-2), \frac{1}{3}(2,-1,2)\Big)\,.$$

(2) In diesem Fall wird zunächst analog vorgegangen: Es ist

$$\chi_B = \det(X \cdot \mathrm{E}_3 - B) = (X-2)\cdot(X-1)^2\,,$$

und für den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ergibt sich ein Eigenvektor $(2,-1,-2)$. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$ jedoch ist zweidimensional. Wir bestimmen eine Basis, indem wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen (wobei wieder in der charakteristischen Gleichung Brüche vermieden wurden); wir erhalten mit dem gaußschen Algorithmus (oder „auf den ersten Blick“)

$$\mathcal{B}' = ((1,2,0),(1,0,1))\,.$$

Nach dem Orthogonalisierungsverfahren entsteht daraus

$$\mathcal{B}'_{\text{orth}} = ((1,2,0),(4,-2,5))\,, \text{ d.h.}$$
$$\mathcal{B} = ((2,-1,-2),(1,2,0),(4,-2,5))$$

ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der Matrix B besteht. Aus $\mathcal{B}$ ergibt sich eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(2,-1,-2), \frac{\sqrt{5}}{5}(1,2,0), \frac{\sqrt{5}}{15}(4,-2,5)\Big)\,.$$

Anmerkungen. Die Rechnung lässt sich im Fall (2) noch vereinfachen, wenn anstelle der schon wiederholt verwendeten Standardmethode zur Bestimmung des Eigenraumes das orthogonale Komplement zum Eigenraum $V_{\lambda_1} = V_{\lambda_2}^{\perp}$ bestimmt wird.

Unter (2) ist leicht zu erkennen, dass die Aufgabe (da ein mehrfacher Eigenwert existiert) unendlich viele Lösungen besitzt. Manchmal sind mit etwas Glück und rechnerischem Geschick sogar noch „bessere“ zu finden, wie im vorliegenden Fall die Basis

$$\Big(\frac{1}{3}\cdot(2,-1,-2), \frac{1}{3}\cdot(2,2,1), \frac{1}{3}\cdot(1,-2,2)\Big)\,,$$

auf die wir bei systematischem Vorgehen mit dem gaußschen Algorithmus nicht gekommen sind.

2. **Lösung.** Offensichtlich ist $\mathcal{B}' = (1, X, X^2)$ eine Orthonormalbasis für P_2. Es folgt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi^\star) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ nach Satz 6/3/1. Aus

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ergibt sich durch Transposition

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi^\star) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten der Polynome f_i bilden die Spalten einer Matrix, für die auf übliche Weise eine inverse gefunden wird, d.h. $\mathcal{B}$ ist Basis von P_2, und die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$ ergibt sich als

$$U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^\star) = U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\cdot\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi^\star)\cdot U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -6 & -2 & -4 \\ 16 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

4. **Lösung.** Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1 \;\, X_2\,)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 1, \quad a_0 = 5.$$

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_2 - A) = X^2 - 10X$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 10$ und $\lambda_2 = 0$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem $A\cdot x = \lambda_1 x$, d.h. gleichbedeutend das System

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(1,-2)$ erzeugt, und da der Eigenraum des anderen Eigenwertes orthogonal zu diesem ist, ergibt sich nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2), \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\,.$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = 10Y_1^2 - \sqrt{5}Y_1 - \sqrt{5}Y_2 + 5$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{t}U A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$f = 10(Y_1 - \frac{1}{20}\sqrt{5})^2 - \sqrt{5}Y_2 + \frac{39}{8}.$$

überführt. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 + \frac{1}{20}\sqrt{5}, \quad Y_2 = Z_2 + \frac{39}{40}\sqrt{5}$$

erhalten wir

$$f = 10Z_1^2 - \sqrt{5}Z_2,$$

woraus nach Multiplikation mit $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ die Gestalt

$$g = 4\sqrt{5}Z_1^2 - 2Z_2$$

entsteht; dies ist die Hauptachsenform einer Parabel.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}Z_1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}Z_2 + 2,$$
$$X_2 = -\frac{2}{5}\sqrt{5}Z_1 + \frac{1}{5}\sqrt{5}Z_2 + \frac{7}{8}.$$