Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 12 zum 11.7.05

1. Überprüfen Sie, dass die Matrizen

   (1) $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (2) $$\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

   bezüglich der Standardbasis des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ orthogonale Abbildungen definieren. Beschreiben Sie die Wirkung dieser Abbildungen!

2. Sind Summe bzw. Produkt normaler Endomorphismen eines unitären Vektorraumes wieder normal?

3. Finden Sie für die reguläre Matrix

   $$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   die polare Zerlegung, d.h. bestimmen Sie symmetrische, positiv definite Matrizen H_1, H_2 sowie eine orthogonale Matrix M, für die $A = M\cdot H_1 = H_2\cdot M$ ist.

4. φ sei ein Endomorphismus des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^n$, für den $\varphi^\star = -\varphi$. ist.

   (1) Beweisen Sie, dass $\exp(\varphi)$ orthogonal ist.

   (2) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass nicht jede orthogonale Abbildung auf diese Weise gewonnen werden kann.

   Hinweis. Zeigen Sie im Fall $n = 2$, dass unter der angegebenen Voraussetzung $\det(\exp(\varphi)) = 1$ ist.

5. Wir betrachten das lineare dynamische System

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\cdot x$$

   im Phasenraum $\mathbb{R}^2$, das durch die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} -7 & 32 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

   gegeben ist. Skizzieren Sie (ohne Maßstab und bis auf Äquivalenz) die Orbits des Systems. Geben Sie in Ihrer Skizze insbesondere die Lage der singulären Punkte (d.h. der einelementigen Orbits) an.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

Hinweis. Die letzte Serie wird nicht bewertet, jedoch teilweise (Aufgabe 1. - 3.) in den Übungen besprochen, da die Rückgabe bereits in die Semesterpause fallen würde.

Abweichend davon können bei Unterschreitung der Minimalpunktzahl für das Semester noch Zusatzpunkte vergeben werden, und zwar unter folgenden Voraussetzungen:

Die Aufgaben 1. - 3. werden bis zum oben angegebenen Termin abgegeben.

Die Aufgaben 4., 5. liegen bis zum unten angegebenen Konsultationstermin vor.

Termin. Wer nicht genügend Punkte für einen Schein erworben hat, aber nicht zu weit von der Minimalpunktzahl entfernt ist, kann sich in einer Konsultation einer Leistungskontrolle unterziehen und so ggf. einen Übungsschein erhalten.
In diesem Fall sollten Sie am **Dienstag, 19.7.05, 15.00 Raum I. 425** zu einem kurzen Gespräch kommen, um Einzelheiten zu klären.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 12 zum 11.7.05

3. **Lösung.** Wir berechnen $\sqrt{C}$ für

$$C = {}^{\mathrm{t}}A\cdot A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der C Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_C = \det(X\cdot\mathrm{E}_2 - C) = X^2 - 5X + 4$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$ der Matrix C. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(-1, 1)$ erzeugt, und da der Eigenraum des anderen Eigenwertes orthogonal zu diesem ist, ergibt sich nach Normierung eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (\,\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2\,)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(-1, 1), \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(1, 1).$$

Durch die Matrix

$$U^{-1} = {}^{\mathrm{t}}U = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Spalten aus den Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ gebildet werden, erhalten wir mit $D := \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$ offensichtlich $D^2 = U \cdot C \cdot U^{-1}$, d.h. $C = U^{-1} \cdot D^2 \cdot U$.
Damit ist

$$H_1 = \sqrt{C} = U^{-1}\cdot D\cdot U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

die beiden anderen gesuchten Matrizen erhalten wir als

$$M = A\cdot H_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = A\cdot M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. **Lösung.** Die Bahnkurve des Systems durch $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\left\{ {}^{\mathrm{t}}x(t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{mit} \quad x(t) = \exp(tA)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben daher das Exponential $\exp(tA)$ zu bestimmen, das ganz allgemein mittels der komplexen jordanschen Normalform der Matrix A aufgefunden werden kann. Charakteristisches Polynom ist

$$\det(X\cdot\mathrm{E}_2 - A) = X^2 - 2X + 1.$$

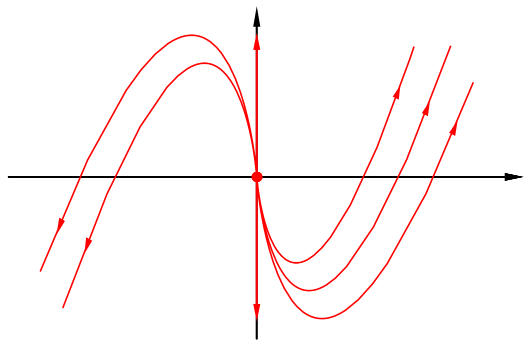
aus $\mathbb{R}[X]$. Es besitzt die Doppelnullstelle 1. Wäre A diagonalisierbar, so folgt in diesem speziellen Fall, dass A bereits diagonal ist, das ist nicht der Fall. Daher kann A durch eine Ähnlichkeitstransformation in den Jordanblock

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

überführt werden; dies entspricht dem Übergang zu einem äquivalenten linearen dynamischen System. Für einen Jordanblock zum Eigenwert 1 erhalten wir

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

als Orbit durch den Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (vgl. auch 6/4/21 (1)). Daraus lassen sich die nachfolgend skizzierten Bahnkurven erkennen.



Es gibt genau einen singulären Orbit $\{(0,0)\}$. Das vorliegende dynamische System ist ein instabiler ausgearteter Knoten.