Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 2 zum 3.11.08

1. M sei eine Menge. Für eine Teilmenge $N \subseteq M$ ist durch
$$\mathrm{Char}_N(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in N, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
die *charakteristische Abbildung* $\mathrm{Char}_N : M \to \{0,1\} = 2$ definiert.
Zeigen Sie, dass $N \mapsto \mathrm{Char}_N$ eine Bijektion zwischen $\mathrm{Pot}(M)$ und 2^M ist (wobei $2^M = \mathrm{Abb}(M, 2)$).

2. Geben Sie in der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ Relationen R_1, $R_2\, R_3$ und R_4 an, für die gilt:
   (1) R_1 ist reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch.
   (2) R_2 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.
   (3) R_3 ist transitiv, symmetrisch und nicht reflexiv.
   (4) R_4 ist transitiv, symmetrisch und reflexiv.

3. f und g seien Abbildungen, für die $f \circ g$ definiert ist. Beweisen Sie:
   (1) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.
   (2) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist auch g injektiv.
   (3) Gilt unter (1) bzw. (2) die Behauptung auch für die jeweils andere Abbildung g bzw. f ?

4. $(f_i)_{i \in I}$ sei eine Familie von Abbildungen $f_i : M_i \to N_i$. Beweisen Sie, dass das kartesische Produkt
$$\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} M_i \to \prod_{i \in I} N_i, \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i \in I}$$
dieser Abbildungen surjektiv ist, falls alle Abbildungen f_i surjektiv sind.
Gilt die Umkehrung?

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm