Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 3 zum 10.11.08

1. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:
   (1) Teilmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar.
   (2) Ist n eine natürliche Zahl ≥ 2, dann gilt $\underbrace{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{n-mal} \approx \mathbb{N}$.
   (3) Sind $A_1, \ldots, A_n$ abzählbar, dann ist $A_1 \times \ldots \times A_n$ abzählbar.

2. G sei eine Gruppe, $g \in G$. Wir bezeichnen mit (g) die Teilmenge $(g) := \{g^n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ von G.
   (1) Zeigen Sie: (g) ist Untergruppe von G.
   (2) Existiert in einer Gruppe G ein Element g mit $(g) = G$, so heißt G eine zyklische Gruppe. Beweisen Sie: Zwei zyklische Gruppen sind genau dann isomorph, wenn ihre Kardinalzahlen übereinstimmen.
   (3) Bestimmen Sie alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe.

3. Welche der folgenden Operationen definiert eine Gruppenstruktur auf der angegebenen Menge und welche der angegebenen Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus?
   (1) $f : \mathbb{Z} \to \{1, -1\}$ mit $f(n) := (-1)^n$ (die Operation auf $\mathbb{Z}$ ist die Addition ganzer Zahlen, die Operation auf $\{1, -1\}$ die Multiplikation ganzer Zahlen)
   (2) $f : \mathbb{Z} \to \{1, -1\}$ mit $f(n) := (-1)^{n+1}$ (die Operationen werden wie zuvor gewählt)
   (3) $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ mit $f(x) := \frac{x}{|x|}$ ($\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ erhält als Operation die Multiplikation rationaler Zahlen)

4.* $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe, $a, b \in G$ und a ein Element der Ordnung 5, für das $a^3 \cdot b = b \cdot a^3$ gilt. Beweisen Sie: $a \cdot b = b \cdot a$.

   Anmerkung. Als *Ordnung* eines Gruppenelements a bezeichnen wir die kleinste Zahl $n \geq 1$, für die a^n das neutrale Element ist (bzw. das Symbol ∞, falls eine solche Zahl nicht existiert).

5. Rechnen mit Permutationen:
   (1) Bestimmen Sie $\sigma \cdot \tau$ und $\tau \cdot \sigma$ für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,6\,1\,3\,5\,2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,4\,5\,3\,1\,6 \end{pmatrix}.$$

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(2) Bestimmen Sie σ^{-1} und die Potenzen σ^n ($n \in \mathbb{N}$) der nachfolgend angegebenen Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsblatt der Aufgabenserie 3 zum 10.11.08

5. **Ergebnis.**

(1) Es ist
$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,3\,5\,1\,4\,2 \end{pmatrix}, \quad \tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,6\,2\,5\,1\,4 \end{pmatrix}.$$

(2) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 2\,3\,7\,4\,1\,5\,6 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 6\,5\,1\,4\,7\,3\,2 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 6\,5\,1\,4\,7\,3\,2 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 7\,6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix},$
$\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 3\,7\,6\,4\,2\,1\,5 \end{pmatrix}, \ldots$