Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 4 zum 17.11.08

1. In S_n betrachten wir für $\sigma \in \mathrm{S}_n$ die Untergruppe $(\sigma) := \{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Die Zahl $o(\sigma) := |(\sigma)|$ heißt Ordnung von σ.

   (1) Zeigen Sie: $(\sigma) = \{\sigma^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

   (2) $\mathcal{M} := \{\tau \cdot (\sigma) \mid \tau \in \mathrm{S}_n\}$ mit $\tau \cdot (\sigma) := \{\tau \cdot \sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Partition der Menge S_n.

   (3) Die Klassen der Partition $\mathcal{M}$ enthalten gleichviele Elemente, und es gilt
   $$|\mathcal{M}| \cdot o(\sigma) = |\mathrm{S}_n|,$$
   insbesondere ist also $o(\sigma)$ ein Teiler von $n! = |\mathrm{S}_n|$.

   (4) Es sei $\mathrm{id} \neq \sigma \in \mathrm{S}_5$ mit $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ eine der Zahlen 2, 3, 5 ist.

   (5)* Berechnen Sie die Ordnung einer Permutation mittels ihrer Zyklenzerlegung. Bestimmen Sie insbesondere die Ordnung von
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 8 & 13 & 5 & 7 & 12 & 4 & 6 & 16 & 18 & 1 & 17 & 19 & 10 & 11 & 15 & 2 & 9 & 14 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_{19}$$

2. $(G, \cdot)$ sei Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : G \to S(G)$ mit $\varphi(g)(x) := g \cdot x$ von G in die Gruppe $S(G)$ der bijektiven Abbildungen $G \to G$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

3. G sei eine Gruppe, H eine Untergruppe vom Index 2, d.h. eine Untergruppe, die genau zwei rechte Nebenklassen besitzt. Beweisen Sie: H ist Normalteiler in G.

4.* Untersuchen Sie in jedem der folgenden Fälle, welche der aufgeführten Gruppen isomorph sind.

   (1) $(\mathrm{S}_3, \circ)$, $(\mathbb{Z}/(6), +)$, $(\mathbb{Z}/(7)^*, \cdot)$

   (2) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

   (3) $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, wobei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen ist; die Operationen sind Einschränkungen der ebenso bezeichneten Operationen für Zahlen.

   (4) $(\mathrm{D}_n, \circ)$ (die Diedergruppe) und $(\mathrm{S}_n, \cdot)$ (für ein festes $n \geq 2$)

5. Rechnen mit komplexen Zahlen:

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(1) $a, \ b$ bezeichnen $a = 3i - 2, \ b = 3i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b, \ a - b, \ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 2)x - (11i - 3) = 0.$$

(3) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = -40i$ mit $x \in \mathbb{C}$.

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsblatt der Aufgabenserie 4 zum 17.11.08

1. **Ergebnis.** Zu (5) geben wir das Resultat der Rechnung an. Durch

   (1,3,13,19,14,10,18,9,16,15,11)
   (2,8,6,12,17)
   (4,5,7)
   ist die Zyklenzerlegung der Permutation σ gegeben; es folgt $o(\sigma) = 165$.

5. **Lösung.**

   (1) Es ist $a + b = 6i - 3$, $a - b = -1$ und $ab = -9i - 7$.
   Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als
   $$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-2)\cdot(-3i-1)}{(3i-1)\cdot(-3i-1)} = \frac{3i+11}{10} = (\frac{3}{10}i + \frac{11}{10}).$$

   (2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch
   $$(x + (\frac{1}{2}i - 1))^2 = (10i - \frac{9}{4})$$
   ausdrücken, gleichbedeutend als
   $$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 1))^2 = 40i - 9.$$
   Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i - 9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher
   $$(u + vi)^2 = 40i - 9$$
   äquivalent zum System
   $$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 40. \end{cases}$$
   Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich
   $$z = u + vi = \pm(5i + 4).$$
   Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher
   $$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$
   Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 1$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

   (3) Wir setzen $x = u + iv$ mit reellen Zahlen u, v. Die Gleichung $x^3 = -40i$ ist nun äquivalent zu
   $$u^3 + 3u^2vi - 3uv^2 - v^3i = -40i,$$
   daher zu

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = 0 \\ 3u^2v - v^3 = -40. \end{cases}$$

Im Fall $u = 0$ ergibt die zweite dieser Bedingungen $v = 2 \cdot \sqrt[3]{5}$, wobei die erste trivialerweise erfüllt ist.

Ist $u \neq 0$, so erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$u^2 - 3v^2 = 0, \text{ d.h. } (u + \sqrt{3}v)(u - \sqrt{3}v) = 0, \text{ also}$$
$$u = \pm\sqrt{3}v$$

und nach Einsetzen in die zweite

$$8v^3 = -40, \text{ daher } v = -\sqrt[3]{5}.$$

$x^3 = -40i$ ist daher genau dann erfüllt, wenn x eine der drei Zahlen $x = 2 \cdot \sqrt[3]{5}\, i$, $x = \pm\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5}\, i$ ist.