Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 5 zum 24.11.08

1. Sind Polynome Funktionen?

   Wir betrachten den dreielementigen Primkörper $K = \mathbb{F}_3$ und bilden den Polynomring $P := K[X]$ über K. Überprüfen Sie, dass der Einsetzungshomomorphismus durch

   $$\Phi : P \to \mathrm{Abb}(K, K)$$
   $$(\Phi(f))(\alpha) := f(\alpha) \quad \text{für } f \in P,\ \alpha \in K$$

   einen Ringhomomorphismus Φ definiert und untersuchen Sie diesen auf Injektivität.

2. Bestimmen Sie die Elemente x aus dem jeweils angegebenen Körper K, für die die angegebene Gleichung erfüllt ist.

   (1) $x^5 + x^4 + 1 = 0$ (K ist einer der Körper $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_7$)

   (2) $x^3 - 1 = 0$ (K ist einer der Körper $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$)

3.* K sei ein endlicher Körper mit n Elementen. Zeigen Sie: $a^n - a = 0$ für alle $a \in K$.

4. Überprüfen Sie die folgenden Rechenregeln:

   (1) A, B, C seien Matrizen, für die das Produkt $A \cdot (B \cdot C)$ definiert ist. Beweisen Sie, dass dann stets $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ gilt (und insbesondere die rechte Seite dieser Gleichung definiert ist).

   (2) Für $A \in \mathrm{M}(m, n; K)$, $B \in \mathrm{M}(n, p; K)$ gilt ${}^{\mathrm{t}}(A \cdot B) = {}^{\mathrm{t}}B \cdot {}^{\mathrm{t}}A$.

   (3) Für $A \in \mathrm{M}(m, n; K)$, $B \in \mathrm{M}(n, p; K)$ und $a, b \in K$ gilt

   $$(a \cdot A) \cdot (b \cdot B) = (ab) \cdot (A \cdot B).$$

5. Berechnen Sie für die folgenden Matrizen

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   die angegebenen Ausdrücke, sofern diese definiert sind.

   $A + 3B - 4C$

   $A \cdot B \cdot C$

   $A \cdot {}^{\mathrm{t}}B \cdot C$

   $A \cdot (B + C)$

   $C + {}^{\mathrm{t}}A \cdot B$

   $A \cdot {}^{\mathrm{t}}A$

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/∼roczen/la.htm

$${}^{\mathrm{t}}A + A$$

$${}^{\mathrm{t}}(2A - B)$$

$${}^{\mathrm{t}}A \cdot A$$

$${}^{\mathrm{t}}(A \cdot B + C)$$

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsblatt der Aufgabenserie 5 zum 24.11.08

5. **Ergebnis.**

$A + 3B - 4C$	ist nicht definiert.
$A \cdot B \cdot C$	ist nicht definiert.
$A \cdot {}^{\mathrm{t}}B \cdot C$	ist nicht definiert.
$A \cdot (B + C)$	ist nicht definiert.
$C + {}^{\mathrm{t}}A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$	
$A \cdot {}^{\mathrm{t}}A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	
$A + {}^{\mathrm{t}}A$	ist nicht definiert.
${}^{\mathrm{t}}(2A - B) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	
${}^{\mathrm{t}}A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	
${}^{\mathrm{t}}(A \cdot B + C)$	ist nicht definiert.