Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 6 zum 1.12.08

1. (1) Zeigen Sie, dass die Menge $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Q} \right\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

   (2) Lösen Sie für
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$
   die Gleichungen $A \cdot X = B$, $Y \cdot A = B$, wobei X, Y Matrizen aus G sind.

   (3) Lösen Sie für die zuvor angegebenen Matrizen A, B und eine weitere Matrix
   $$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$
   die Gleichung $A \cdot Z \cdot B = C$.

2.* Wir setzen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass die Menge $G = \{A^i \cdot B^j \mid i = 0, 1, 2\, , \, j = 0, 1\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet, die zur Permutationsgruppe S_3 isomorph ist.

3. Lösen Sie über dem Grundkörper der reellen Zahlen das folgende lineare Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ -4x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ -6x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= -10 \end{aligned}$$

4. Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ aus $\mathbb{F}_3^5$, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.
$$\begin{aligned} -x_1 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ -x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \\ -x_4 - x_5 &= -1 \end{aligned}$$

5. Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem über $\mathbb{C}$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.
$$\begin{aligned} (i+1)x_1 + (i+1)x_2 + (i+1)x_3 &= 0 \\ -ix_2 - (i+1)x_3 &= i \end{aligned}$$

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm