Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 7 zum 8.12.08

1. Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + 12x_3 + 4x_4 &= -26 \\ 4x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 12x_4 &= -38 \\ 12x_1 - 6x_3 - 4x_4 &= -4 \\ 10x_1 + 2x_2 + 12x_4 &= -48 \end{aligned}$$
über dem Körper K in jedem der folgenden Fälle
   (1) $\mathrm{char}(K) = 0$,
   (2) $\mathrm{char}(K) = 5$,
   (3) $\mathrm{char}(K) = 3$.
   Beachten Sie, dass das Symbol für eine ganze Zahl n auch als Bezeichnung für das Element $n \cdot 1 \in K$ verwendet wird.

2. Lösen Sie für eine feste Zahl $c \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} x_1 + (2c+1)x_2 - (c-1)x_3 &= -(c+1) \\ x_1 + (3c+2)x_2 - (4c+2)x_3 &= -(c-2) \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie in $\mathbb{R}^3$ jeweils die Anzahl der Lösungen (x, y, z) des linearen Gleichungssystems
$$\begin{aligned} x + wy &= 1 \\ wx + 3y &= 2 \\ 2y + wz &= 3, \end{aligned}$$
wobei w eine der folgenden drei Zahlen ist.
   (1) $w = \sqrt{3}$,
   (2) $w = 1,7320508075688772935274463415058723669428$,
   (3) $w = 0$.

4. Überführen Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -3 & -3 \\ -6 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$
durch Zeilentransformationen in eine obere Dreiecksmatrix und geben Sie ihren Rang an.

---
[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

5.* a, b, c seien reelle Zahlen. Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsblatt der Aufgabenserie 7 zum 8.12.08

1. **Ergebnis.**
   (1) $\{(-2,-2,-2,-2)\}$,
   (2) $\{(-2,1,0,0)+t_1\cdot(-2,0,1,0)+t_2\cdot(2,-1,0,1) \mid t_1, t_2 \in K\}$,
   (3) $\{(-1,-1,0,1)+t_1\cdot(-1,-1,1,0) \mid t_1 \in K\}$.

2. **Lösung.** Durch eine einfache Zeilenoperation erhalten wir ein äquivalentes System in Zeilenstufenform:
$$\begin{aligned} x_1 + (2c+1)x_2 - (c-1)x_3 &= -(c+1) \\ (c+1)x_2 - (3c+3)x_3 &= 3 \end{aligned}$$
Daraus sind die Lösungsmengen leicht abzulesen, dies sind falls $c \neq -1$
$$\left\{ \left(\frac{-(c^2+8c+4)}{(c+1)}, \frac{3}{(c+1)}, 0 \right) + t\cdot(-(5c+4),3,1) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$
sowie für $c=-1$ die leere Menge.

4. **Lösung.** $a_{11} = 0$, daher wird zunächst die erste Zeile mit der zweiten vertauscht. Wir erhalten
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -4 & -3 & -3 \\ -6 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$
Nun können Vielfache der ersten Zeile von den folgenden subtrahiert werden, so dass die übrigen Einträge der ersten Spalte verschwinden. Entsprechend wird mit der zweiten Zeile verfahren; wir erhalten zeilenäquivalente Matrizen
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}.$$
Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Zeile der zuletzt aufgetretenen Matrix mit -5, bzw. 3, multipliziert; entsprechend ergibt sich sich
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -5 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -115 \\ 0 & 0 & -15 & -33 \end{pmatrix},$$
daher nach Subtraktion der dritten Zeile von der vierten
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 82 \end{pmatrix}.$$
Es entsteht eine Stufenmatrix mit vier Zeilenstufen, daher ist
$$\operatorname{rang}(A) = 4.$$

Tatsächlich lässt sich zeigen, dass hier der allgemeine Fall vorliegt; eine Matrix aus $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ hat „fast immer“ den Rang n.

Das hier verwendete Verfahren ist eine Variante des gaußschen Algorithmus. Es ist allgemein ausführbar und beruht auf der Hintereinanderausführung von Zeilentransformationen der folgenden Art:

(1) Addition des Vielfachen einer Zeile von A zu einer anderen,

(2) Multiplikation einer Zeile der Matrix A mit einer Zahl $c \neq 0$,

(3) Vertauschen zweier Zeilen der Matrix A.