Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 8 zum 15.12.08

1. Bestimmen Sie den Rang der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 11 \\ 0 & -6 & 0 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$
wenn diese als Matrix
   (1) über dem Körper $\mathbb{R}$,
   (2) über dem Körper $\mathbb{F}_3$ bzw.
   (3) über dem Körper $\mathbb{F}_2$
   aufgefasst wird.

2.* Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen für Matrizen über dem Körper K.
   (1) A sei die Diagonalmatrix
   $$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$
   mit $a_i \in K$. Dann gilt $\operatorname{rang}(A) = n - |\{i \mid a_i = 0\}|$.
   (2) Eine obere Dreiecksmatrix
   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
   hat genau dann den Rang n, wenn $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$.
   (3) B sei eine Matrix der Gestalt
   $$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_1 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}$$
   mit $a_i, b_j \in K$, wobei wenigstens eine der Zahlen a_i und wenigstens eine der Zahlen b_j von Null verschieden sind. Dann hat die Matrix B den Rang 1.
   (4) Permutationsmatrizen aus $\mathrm{M}(n;K)$ haben den Rang n.

3. Entscheiden Sie mit Hilfe des Satzes von Kronecker-Capelli, welches der folgenden Gleichungssysteme über den Körper $\mathbb{F}_5$ lösbar ist und geben Sie in diesem Fall die Anzahl der Lösungen an.

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(1) $$\begin{cases} -2x_1 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

4. Für die nachfolgend angegebenen Matrizen sind die Inversen zu bestimmen;

(1) $$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -7 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_3),$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} 1 & -(i+1) \\ i & -(i-2) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{C}).$$

5. Eine Nachricht wird in der folgenden Weise verschlüsselt, indem zunächst Buchstaben auf Elemente des Primkörpers $\mathbb{F}_{29}$ abgebildet werden.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	-	,	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Die entstandenen Ziffern werden als Folge von Zahlenpaaren angeordnet (wobei ggf. am Ende der Nachricht ein Leerzeichen einzufügen ist, damit eine gerade Anzahl von Buchstaben entsteht). Nun bezeichne A eine reguläre Matrix aus $\mathrm{M}(2; \mathbb{F}_{29})$; die zugehörige Abbildung $\mathbb{F}_{29}^2 \to \mathbb{F}_{29}^2$ bildet die Paare der Folge auf neue Paare ab.

Als verschlüsselte Nachricht bezeichnen wir denjenigen Text, der der Folge der Bilder der Zahlenpaare entspricht.

Verschlüsseln Sie die Nachricht „FREITAG INGE“ unter Verwendung der Matrix $A = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$.