Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 10 zum 12.1.09

1. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum V aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen a_n. Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob die betreffende Teilmenge einen Unterraum bildet.

   (1) $U_1 := \{(a_n) \in V \mid \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0\}$

   (2) $U_2 := \{(a_n) \in V \mid \lim_{n\to\infty}(a_n) = 1\}$

   (3) $U_3 := \{(a_n) \in V \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 1\}$

   (4) $U_4 := \{(a_n) \in V \mid (a_n) \text{ konvergiert}\}$

   (5) $U_5 := \{(a_n) \in V \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ a_n = a_{n+1} \ \text{ für } \ n \geq n_0\}$.

2. V sei ein K-Vektorraum und $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$. Wir definieren eine Abbildung $f : K^n \to V$ durch

   $$f(x_1, \ldots, x_n) := x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n.$$

   Zeigen Sie:

   (1) f ist eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen.

   (2) f ist genau dann surjektiv, wenn $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ ein Erzeugendensystem von V bildet.

3. U_1, U_2 und U_3 seien Unterräume des K-Vektorraumes V. Für Teilmengen $M, M' \subseteq V$ wird mit $M + M'$ die Menge

   $$\{m + m' \mid m \in M, \ m' \in M'\}$$

   bezeichnet. Zeigen Sie:

   (1) $U_1 + U_1 = U_1$,

   (2) $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$,

   (3) $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$,

   (4) $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$,

   (5) $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$,

   (6) $U_1 \subseteq U_3 \Rightarrow U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$.

4. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{M}(n; \mathbb{R})$ quadratischer Matrizen. Mit U_1, U_2 bezeichnen wir die folgenden Teilmengen:

   $$U_1 := \{(a_{ij}) \in V \mid a_{ij} = 0 \ \text{ für } \ i \neq j\},$$
   $$U_2 := \{(a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \ \text{ für } \ i + j \neq n + 1\}.$$

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(1) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ die Mengen U_1, U_2 Unterräume von V sind.

(2) Zeigen Sie, dass für $n = 2$ gilt: $V = U_1 \bigoplus U_2$.

(3)* Geben Sie eine Verallgemeinerung für (2) an!

5. $\varphi : V \to W$ sei ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen. Wir definieren für beliebige K-Vektorräume Z eine Abbildung

$$\Phi_Z : \mathrm{Hom}_K(Z, V) \to \mathrm{Hom}_K(Z, W)$$

durch $\Phi_Z(\sigma) := \varphi \cdot \sigma$. Zeigen Sie, dass dann auch Φ_Z ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen ist.