Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 11 zum 19.1.09

1. Wir betrachten die Vektoren
   (1) $(-2,-1,1),\ (1,2,-2),\ (-1,0,0)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,
   (2) $(-1,0,1),\ (-1,1,-1),\ (-1,0,0)$ im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$,
   (3) $(1,2,1,-2),\ (-2,-2,1,-1),\ (0,0,-1,-1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$,
   (4) $\frac{1}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{11}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,
   (5) $((i+2),-(i-1)),\ ((i+1),1)$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$,
   (6)* $\ln(2),\ \ln(3)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.
   Stellen Sie in jedem Fall fest, ob die angegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem bzw. ein linear unabhängiges System bilden.

2. Wir betrachten den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als $\mathbb{Q}$-Vektorraum; $(1,a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ sei ein Zahlenpaar. Zeigen Sie: $(1,a)$ ist genau dann linear abhängig, wenn $a \in \mathbb{Q}$.

3. Nachfolgend ist in jedem Fall ein Vektorraum V mit einer Familie $\mathcal{B}$ von Vektoren gegeben. Prüfen sie jeweils, ob $\mathcal{B}$ eine Basis ist und bestimmen Sie in diesem Fall die Koordinaten von $\boldsymbol{x} \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$.
   (1) $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ mit $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ im Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ sowie $\boldsymbol{x} = (3,-2,-1)$.
   (2) V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} := (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ mit $\boldsymbol{v}_1 = (-1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,1,-1)$ und $\boldsymbol{x} = (-2,1,3)$.
   (3) V sei der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$, sowie $\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(1,1,1))$, $\boldsymbol{x} = (0,1,1)$.
   (4) $V = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ sei der von $\{1, \sqrt{2}\}$ erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\mathcal{B} := (3, \sqrt{2})$ sowie $\boldsymbol{x} = (1+\sqrt{8})^2$.

4. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_4$ eine Basis des Standardvektorraumes $\mathbb{R}^4$ bilden und geben Sie die Koordinaten von $\boldsymbol{v} = (0,1,7,5)$ bezüglich $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ an.
   $$b_1 = (2,2,1,-2), \quad b_2 = (2,-1,2,1),$$
   $$b_3 = (2,2,0,-2), \quad b_4 = (0,2,2,1)$$

5. Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ wird durch $U := \mathbb{R}\boldsymbol{a} + \mathbb{R}\boldsymbol{b} + \mathbb{R}\boldsymbol{c} + \mathbb{R}\boldsymbol{d} + \mathbb{R}\boldsymbol{e}$ ein Unterraum gegeben, wobei
   $$\boldsymbol{a} = (1,0,-2,2),\ \boldsymbol{b} = (-1,-2,2,-2),\ \boldsymbol{c} = (0,-2,0,0),$$
   $$\boldsymbol{d} = (0,-1,0,1),\ \boldsymbol{e} = (3,1,0,3).$$
   Wählen Sie aus der Menge $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$ der Erzeugenden von U eine Basis aus!

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsblatt der Aufgabenserie 11 zum 19.1.09

1. **Ergebnis.** Die angegebenen Vektoren sind
   (1) linear abhängig, kein Erzeugendensystem,
   (2) linear unabhängig und ein Erzeugendensystem,
   (3) linear unabhängig, kein Erzeugendensystem,
   (4) linear abhängig, kein Erzeugendensystem,
   (5) linear unabhängig und Erzeugendensystem,
   (6) linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem.

3. **Ergebnis.**
   (1) $\mathcal{B}$ ist eine Basis (kanonische Basis des gegebenen Standardraumes). Die gesuchten Koordinaten sind $(3, -2, -1)$.
   (2) $\mathcal{B}$ ist keine Basis.
   (3) $\mathcal{B}$ ist keine Basis.
   (4) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(3, 4)$.

4. **Lösung.** Wir bilden zunächst die Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ aus den Spalten ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}_i$ sowie daraus die Matrix $B \in \mathrm{M}(4, 5; \mathbb{R})$, indem wir als letzte Spalte das Quadrupel ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}$ hinzufügen. B ist erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems; durch Zeilentransformationen erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix eines äquivalenten Systems in Stufenform:
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   Wir sehen insbesondere, dass die aus den ersten 4 Spalten gebildeten Teilmatrix und daher auch A den Rang 4 hat, d.h. $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$.
   Schrittweises Einsetzen ergibt nun als Lösung des Systems $Ax = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}$ die gesuchten Zahlen x_i mit $x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 + x_4\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{v}$.
   $\boldsymbol{v}$ hat die Koordinaten $(1, 1, -2, 2)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

5. **Ergebnis.** Die Vektoren $(1, 0, -2, 2)$, $(-1, -2, 2, -2)$, $(0, -1, 0, 1)$, $(3, 1, 0, 3)$ bilden eine Basis von U.