Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 12 zum 26.1.09

1. U_1, U_2 seien Unterräume des K-Vektorraumes V und $\boldsymbol{v}_i \in U_i \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ Vektoren ($i = 1, 2$). Zeigen Sie:
   (1) Das Paar $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ ist linear unabhängig, falls $U_1 \cap U_2 = \boldsymbol{0}$ ist.
   (2) Die beiden Bedingungen unter (1) sind äquivalent, sofern überdies $U_1 = K \cdot \boldsymbol{v}_1$ und $U_2 = K \cdot \boldsymbol{v}_2$ vorausgesetzt wird.

2. Im K-Vektorraum V fixieren wir Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $n \geq 2$. Zeigen Sie:
   Das $(n-1)$-Tupel $(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_n, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1} - \boldsymbol{a}_n)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_1)$ linear unabhängig ist.

3. Im Standardvektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir die Vektoren
   $$\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, 0, -2), \quad \boldsymbol{v}_2 = (-1, 1, 2, 0),$$
   $$\boldsymbol{v}_3 = (-1, 2, -1, 2), \quad \boldsymbol{v}_4 = (2, 2, 2, 1) \text{ und}$$
   $$\boldsymbol{w}_1 = (-1, -2, -1, -4), \quad \boldsymbol{w}_2 = (1, -4, -2, 1).$$
   (1) Überprüfen Sie, dass $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ eine Basis bilden und $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ linear unabhängig sind.
   (2) Verwenden Sie das Austauschverfahren zur Bestimmung einer Basis der Gestalt $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2})$.

4. V bezeichnet den reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ und W den reellen Standardraum $\mathbb{R}^2$.
   (1) Existiert eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit der Eigenschaft
   $$f(0, -2, -2) = (2, 0)$$
   $$f(2, 0, 1) = (-3, 1)$$
   $$f(2, -2, -1) = (0, -1) \text{ ?}$$
   (2) Existiert eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit der Eigenschaft
   $$f(0, 0, 1) = (1, 1)$$
   $$f(0, -2, 1) = (5, 5)$$
   $$f(-1, -2, 2) = (8, 4) \text{ ?}$$
   (3) Geben Sie eine Verallgemeinerung Ihres Resultats an!

5. Wir untersuchen die folgende Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{\mathbf{R}}(4, 5).$$

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(1) Welchen Rang hat A?

(2) φ sei der Homomorphismus von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^4$, der durch A definiert wird. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ und $\ker(\varphi)$.

(3) Ergänzen Sie die gefundene Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsblatt der Aufgabenserie 12 zum 26.1.09

3. **Lösung.** Mit A bezeichnen wir die Matrix, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ gebildet werden,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Zeilenoperationen wird diese leicht in die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

überführt, die offensichtlich 4 Stufen und daher den vollen Rang $4 = \operatorname{rang}(A') = \operatorname{rang}(A)$ hat. Daher ist $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$.
Nun fügen wir zu A auf der linken Seite die durch $\boldsymbol{w}_1$ und $\boldsymbol{w}_2$ gebildeten Spalten hinzu und führen wiederum Zeilenoperationen aus, die diese Matrix in Zeilenstufenform transformieren,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

Dann bilden die Spalten der ersten Matrix, deren Positionen durch die Stufenindizes der zweiten gegeben sind, eine Familie linear unabhängiger Vektoren. Insbesondere bilden die ersten beiden Spalten und damit $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ ein linear unabhängiges Paar. Wir erhalten die Basis

$$((-1,-2,-1,-4),(1,-4,-2,1),(0,1,0,-2),(-1,1,2,0)).$$

4. **Lösung zu (1), (2).**
   (1) Offenbar ist
   $$(2,-2,-1) = 1 \cdot (0,-2,-2) + 1 \cdot (2,0,1);$$
   wäre f linear, so hätten wir
   $$f(2,-2,-1) = 1 \cdot f(0,-2,-2) + 1 \cdot f(2,0,1) = (-1,1) \neq (0,-1).$$
   Folglich kann f nicht linear sein.
   (2) $$f(x,y,z) = (-2x-2y+z, 2x-2y+z).$$

5. **Ergebnis.**
   (1) Die Matrix A hat den Rang 3.
   (2) Eine Basis für $\ker(\varphi)$ ist
   $$((-4,-1,16,0,6),(-2,-5,20,6,0)),$$
   eine Basis für $\operatorname{im}(\varphi)$ ergibt sich als
   $$((2,-2,1,-2),(-1,-1,1,-3),(0,-1,0,-2)).$$

(3) Die zuvor gefundene Basis für $\mathrm{im}(\varphi)$ lässt sich folgendermaßen zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen:

$$((2,-2,1,-2),(-1,-1,1,-3),(0,-1,0,-2),(1,0,0,0))$$