Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Serie 13 zum 2.2.09

1. Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Unterräume des Vektorraumes U_3 und $U_1 \subseteq U_2$, so ist U_2/U_1 Kern eines kanonischen Homomorphismus

   $$U_3/U_1 \to U_3/U_2, \quad \boldsymbol{v} + U_1 \mapsto \boldsymbol{v} + U_2,$$

   der einen Isomorphismus $(U_3/U_1)/(U_2/U_1) \cong U_3/U_2$ induziert.

2. F sei ein endlicher Körper; beweisen Sie:

   Es existieren eine Primzahl p sowie eine natürliche Zahl $n \geq 1$, für die $|F| = p^n$ die Anzahl der Elemente von F ist.

3. Wir untersuchen die folgende Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(4,5).$$

   (1) Welchen Rang hat A?

   (2) φ sei der Homomorphismus von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^4$, der durch A definiert wird. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{im}(\varphi)$ und $\ker(\varphi)$.

   (3) Ergänzen Sie die gefundene Basis von $\mathrm{im}(\varphi)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

4. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die kanonische Basis $\mathcal{B} := (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ und das Tripel $\mathcal{B}' := (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ mit

   $$\boldsymbol{b}_1 := (0,0,-1),\ \boldsymbol{b}_2 := (-2,-1,-1),\ \boldsymbol{b}_3 := (2,-1,2).$$

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}'$ eine Basis ist und geben Sie beide Übergangsmatrizen zwischen den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ an. Stellen Sie fest, welche Koordinaten der Vektor $\boldsymbol{x} = (3,-1,-3)$ bezüglich $\mathcal{B}'$ hat. Wie würden Sie diese Aufgabe lösen, wenn die betreffende Übergangsmatrix nicht gefragt wäre?

5. P_2 sei der Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 2 im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_2$, die bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ durch die folgende Matrix

   $$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   beschrieben wird.

   (1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (-X^2 - X + 1, -2X^2 - 2X - 2, -X^2 - 2)$ eine Basis von P_2 ist.

   (2) Bestimmen Sie $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsblatt der Aufgabenserie 13 zum 2.2.09

3. **Ergebnis.**
   (1) Die Matrix A hat den Rang 3.
   (2) Eine Basis für $\ker(\varphi)$ ist
   $$((6, -5, 4, 0, 8), (-6, -5, -4, 4, 0)),$$
   eine Basis für $\mathrm{im}(\varphi)$ ergibt sich als
   $$((-2, 0, -3, -1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 5, 0)).$$
   (3) Die zuvor gefundene Basis für $\mathrm{im}(\varphi)$ lässt sich folgendermaßen zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen:
   $$((-2, 0, -3, -1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 5, 0), (1, 0, 0, 0))$$

4. **Ergebnis.** Wir erhalten die Übergangsmatrizen
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
$\boldsymbol{x}$ hat die Koordinaten $(\frac{23}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ bezüglich $\mathcal{B}'$.

5. **Ergebnis (2).** Es ist
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$