Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 1 zum 20.4.09

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
unter Verwendung geeigneter Zeilentransformationen für A.

2. K sei ein Körper. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die angegebenen Determinantenformeln.
   (1) Sind $A, B \in \mathrm{M}(n; K)$, so ist $|A + B| = |A| + |B|$.
   (2) Ist $A \in \mathrm{M}(n; K)$, $\alpha \in K$, so gilt $|\alpha A| = \alpha|A|$.
   (3) Ist $A \in \mathrm{M}(n; K)$, $\alpha \in K$, so gilt $|\alpha A| = \alpha^n|A|$.

3. Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen
   (1) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
   über $\mathbb{F}_5$ und
   (2) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   über dem Körper $\mathbb{F}_2$.

---
[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Lösungsblatt der Aufgabenserie 1 zum 20.4.09

1. **Lösung.** $a_{11} = 0,$ daher wird – wie beim gaußschen Algorithmus – zunächst die erste Zeile mit der zweiten vertauscht. Dabei ändert sich das Vorzeichen der Determinante, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nun können Vielfache der ersten Zeile von den folgenden subtrahiert werden, so dass die Einträge a_{i1} verschwinden. Wir erhalten eine neue Matrix mit derselben Determinante, und entsprechend wird mit der zweiten Zeile verfahren, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & 20 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 34 & 25 \end{pmatrix}.$$

Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Zeile der zuletzt aufgetretenen Matrix mit 34 bzw. 5 multipliziert; entsprechend erhält die Determinante den Faktor $\frac{1}{34} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{170}$. Es ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 34 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{170} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 170 & 170 \\ 0 & 0 & 170 & 125 \end{pmatrix},$$

daher nach Subtraktion der dritten Zeile von der vierten

$$-\det(A) = \frac{1}{170} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 170 & 170 \\ 0 & 0 & 0 & -45 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{170} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 170 \cdot (-45) = -45.$$

Wir erhalten $\det(A) = 45.$

Das hier verwendete Verfahren zur Bestimmung der Determinante ist eine Variante des gaußschen Algorithmus. Es ist allgemein ausführbar und beruht auf den folgenden Eigenschaften.

(1) Bei Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen bleibt die Determinante einer Matrix unverändert.

(2) Bei Multiplikation einer Zeile der Matrix A mit einer Zahl c wird $\det(A)$ in $c \cdot \det(A)$ überführt.

(3) Durch Vertauschen zweier Zeilen der Matrix A wird $\det(A)$ in $-\det(A)$ überführt.

(4) Die Determinante einer (z.B. oberen) Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge ihrer Hauptdiagonale.

3. **Lösung.**

(1) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

(2) Wir erhalten

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$