Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 2 zum 27.4.09

1. Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden komplexen Matrizen:

(1) $$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & (i-1) \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -(i-2) & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 & 2 \\ 2i & 2i & 0 & i \\ 0 & i & 2i & 2i \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Welcher der folgenden Endomorphismen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein Automorphismus?

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + 2x_3, -x_1, -x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.

(2) $f_t(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, tx_3 + 3x_2, x_1 + x_2 + 3x_3)$
(für eine gegebene Zahl $t \in \mathbb{R}$).

3. K sei ein Körper. Für $a_1, \ldots, a_n \in K$ setzen wir

$$[a_1, \ldots, a_n] := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie:

(1) $[a_1, \ldots, a_n] = a_n \cdot [a_1, \ldots, a_{n-1}] + [a_1, \ldots, a_{n-2}]$

(2) $$\frac{[a_1, \ldots, a_n]}{[a_2, \ldots, a_n]} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

4. Beweisen Sie für die Adjungierte $\operatorname{adj}(A)$ einer Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$:

(1) $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$,

(2) $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-2} \cdot A$ für $n \geq 2$.

5. Nachfolgend sind lineare Endomorphismen endlichdimensionaler K-Vektorräume angegeben. Bestimmen Sie in jedem Fall die Determinante.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.614, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(1) $\varphi : K^n \to K^n$, wobei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$ ist und $n \geq 2$,

(2) $\varphi : V \to V$, wobei $\varphi(v) := 8v$ ist,

(3) $K = \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - x_3, x_1).$$

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Lösungsblatt der Aufgabenserie 2 zum 27.4.09

1. **Lösung.**

(1) Wir erhalten

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & (i-1) \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -(i-2) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & (i-1) \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4i.$$

(2) Es ist $\det(B) = (12i - 22)$.

2. **Lösung.**

(1) Die Matrix von f ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

sie hat die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

(Die Spalten 2 und 3 sind proportional.)

f ist kein Automorphismus.

(2) Die Matrix von f_t ist

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & t \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

für ihre Determinante ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & t \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & 3 & t \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 3 & t \end{vmatrix} = -4t + 24.$$

Daher ist f_t genau dann ein Automorphismus, wenn $t \neq 6$.

5. **Lösung.**

(1) Der Endomorphismus hat bezüglich der Standardbasis die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist 1 für $n = 2$ und 0 sonst.

(2) Die Matrix des Endomorphismus bezüglich der Standardbasis ist

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 8 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 8 \end{pmatrix},$$

seine Determinante daher $8^{\dim(V)}$.

(3) Die Matrix des Endomorphismus φ bezüglich der Standardbasis ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

denn ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{S}_j(A) = \varphi(\boldsymbol{e}_j)$. Es folgt

$$\det(\varphi) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$