Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 3 zum 4.5.09

1. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A in Abhängigkeit von den Parametern $s,\ t$.
$$A = \begin{pmatrix} t-3s & -2t+4s & 3t-8s \\ -2t+6s & 4s & -2s \\ -2t+6s & 2t-4s & -3t+8s \end{pmatrix}$$

2. Wir untersuchen Determinanten von Endomorphismen eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes V.
   (1) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und φ definiert durch
   $$\varphi(x,y,z) := (-y-z, -x+z, x-y).$$
   Bestimmen Sie $\det(\varphi)$.
   (2) U und W seien Unterräume ($\neq \mathbf{0}$), für die $V = U \oplus W$ gilt. Durch die folgenden Vorschriften sind auf eindeutige Weise lineare Endomorphismen von V definiert.
   $$\psi_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in W$$
   $$\psi_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) := 2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in W$$
   Bestimmen Sie die Determinanten von ψ_1 und ψ_2.
   (3) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $\alpha \in K$ ein Endomorphismus des Vektorraumes $V \neq \mathbf{0}$ existiert, dessen Determinante α ist.

3. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ und $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ bezeichnen Vektoren aus $\mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind Bilinearformen?
   (1) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := -x_2y_2$
   (2) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := -2x_1 - 2x_2 + y_1 + 5y_2$
   (3) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := x_1^2 - 2x_2^2 + y_1^2 - 2y_2^2$
   (4) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := 2x_1^2y_1 - x_1x_2y_2 + 2x_1y_1 - x_2y_2$
   (5) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := 2x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$

4. Wir untersuchen Abbildungen $V \times V \to K$ für K-Vektorräume V. Entscheiden Sie, in welchem Fall Bilinearität vorliegt.
   (1) $f(x,y) := x \cdot {}^t y$ für den Standardvektorraum $V = K^n$,
   (2) $g(A,B) := \mathrm{tr}(A \cdot B)$ für den K-Vektorraum $V = \mathrm{M}(n;K)$,
   (3) $h(A,B) := \det(A \cdot B)$ für den K-Vektorraum $V = \mathrm{M}(n;K)$.

5. f sei die Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$, die durch
   $$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 - 2x_2y_2$$
   definiert wird.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(1) Geben Sie die Matrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = ((-2, -2), (2, -1))$ an.

(2) Geben Sie die Matrix $B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}' = ((2, -2), (0, 2))$ an.

(3) Geben Sie die Übergangsmatrix $U := \mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$ an und überzeugen Sie sich davon, dass $B = {}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U$ ist.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Lösungsblatt der Aufgabenserie 3 zum 4.5.09

1. **Lösung.** Eine prinzipielle Möglichkeit zur Behandlung solcher Aufgaben ist durch das Determinantenkriterium gegeben; dazu sind die Nullstellen aller Determinanten quadratischer Teilmatrizen zu untersuchen. Wir gehen hier anders vor, dabei werden die folgenden Fälle unterschieden.

   (1) $s = t = 0$, dann ist $A = 0$ und folglich $\operatorname{rang}(A) = 0$.

   (2) $s = 0$ und $t \neq 0$; dann ergibt sich
   $$A = \begin{pmatrix} t & -2t & 3t \\ -2t & 0 & 0 \\ -2t & 2t & -3t \end{pmatrix}.$$
   Wegen $t \neq 0$ ist $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\frac{1}{t} \cdot A)$,
   $$\frac{1}{t} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$
   also $\operatorname{rang}(A) = 2$.

   (3) $s \neq 0$, so ist $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\frac{1}{s} \cdot A)$. Setzen wir $u = \frac{t}{s}$, so ist
   $$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} u-3 & -2u+4 & 3u-8 \\ -2u+6 & 4 & -2 \\ -2u+6 & 2u-4 & -3u+8 \end{pmatrix}.$$
   Wir berechnen die Determinante
   $$\begin{vmatrix} u-3 & -2u+4 & 3u-8 \\ -2u+6 & 4 & -2 \\ -2u+6 & 2u-4 & -3u+8 \end{vmatrix} = 8u^2 - 48u + 72$$
   und erhalten für $u \neq 3$ (d.h. $t \neq 3s$) $\det(A) \neq 0$, daher $\operatorname{rang}(A) = 3$. Für $u = 3$ ist
   $$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$
   folglich $\operatorname{rang}(A) = 1$.

2. **Lösung.** Wir führen die Rechnungen zu (1) und (2) aus.

   (1) Die Matrix des Endomorphismus bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ ist
   $$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Daher folgt
   $$\det(\varphi) = \det\left(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
   $$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

(2) Es sei $r = \dim(U)$ und $s = \dim(W)$. Wir wählen Basen $\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ in U und $\mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ in W, dann ist $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ eine Basis in V. Bezüglich $\mathcal{B}$ haben ψ_1 bzw. ψ_2 die Matrizen

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\psi_1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\psi_2) = \begin{pmatrix} 2 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -3 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & -3 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\det(\psi_1) = 0$ und $\det(\psi_2) = 2^r \cdot (-3)^s$.

3. **Ergebnis.**

(1) f ist Bilinearform.

(2) f ist keine Bilinearform.

(3) f ist keine Bilinearform.

(4) f ist keine Bilinearform.

(5) f ist Bilinearform.

5. **Lösung.**

(1) Offensichtlich ist

$$f((-2,-2),(-2,-2)) = -12$$
$$f((-2,-2),(2,-1)) = -6$$
$$f((2,-1),(-2,-2)) = -18$$
$$f((2,-1),(2,-1)) = 18\,;$$

wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -18 & 18 \end{pmatrix}.$$

(2) Entsprechend finden wir

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

(3) Die Übergangsmatrix ist

$$\mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -18 & 18 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$