Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 4 zum 11.5.09

1. Geben Sie für jede der nachfolgend aufgeführten quadratischen Formen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die zugehörige symmetrische Matrix an.

   (1) $f(x,y) = -4xy + y^2$

   (2) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$

   (3) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + 2xz - y^2 - 2yz + 2z^2$

   (4) $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 3xz + 2yz - z^2$

2. Geben Sie für jede der folgenden reellen Matrizen A eine invertierbare Matrix U an, für die ${}^{t}U \cdot A \cdot U$ diagonal ist.

   (1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

   (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

   (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   Welchen Rang und welche Signatur haben die entsprechenden quadratischen Formen?

3. Geben sie einen reellen Vektorraum V und eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ an sowie eine quadratische Form $\boldsymbol{q} : V \to \mathbb{R}$, für die beide der folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

   a) $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{b}_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

   b) $\boldsymbol{q}$ ist nicht positiv definit.

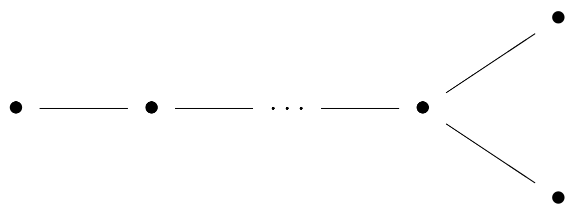
4.** Ein Graph $\Gamma := (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ besteht aus einer (hier endlichen) Menge $\mathcal{E}$ von *Ecken* und einer Menge $\mathcal{K}$ zweielementiger Teilmengen von $\mathcal{E}$, den *Kanten*. Wir zeichnen ihn durch Angabe von Punkten (Ecken) und Verbindungslinien von Punkten (Kanten). Verwenden wir die Notation $\mathcal{E} = \{1, \ldots, n\}$, so lässt sich Γ eine quadratische Form $\boldsymbol{q}_\Gamma$ auf $\mathbb{R}^n$ zuordnen durch die Vorschrift

$$\boldsymbol{q}_\Gamma(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} a_{ij} x_i x_j$$

mit $a_{ii} := -2$ und $a_{ij} := 1$ falls $i \neq j$ und $\{i,j\} \in \mathcal{K}$; anderenfalls setzen wir $a_{ij} := 0$.

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.614, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(1) Zeigen Sie, dass für die folgenden beiden Graphen mit jeweils n Ecken die quadratische Form $\boldsymbol{q}_\Gamma$ negativ definit ist (wobei im ersten Fall $n \geq 1$ und im zweiten $n \geq 4$ zu wählen ist).



(2) Γ heißt zusammenhängend, falls sich zwei beliebige Ecken durch eine Folge von Kanten verbinden lassen.
Finden Sie alle zusammenhängenden Graphen Γ, für die $\boldsymbol{q}_\Gamma$ negativ definit ist.

5. Bestimmen Sie für die nichtausgeartete alternierende Bilinearform $\boldsymbol{b}$ auf dem Standardraum $\mathbb{R}^4$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert wird, eine symplektische Basis.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Lösungsblatt der Aufgabenserie 4 zum 11.5.09

1. **Ergebnis.**

(1) $$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) $$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. **Ergebnis.**

(1) $$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$^{t}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Es folgt $\operatorname{rang}(A) = 1$, und A hat die Signatur -1.

(2) $$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$^{t}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -54 \end{pmatrix},$$
$\operatorname{rang}(A) = 3$ und A hat die Signatur 1.

(3) $$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$
$$^{t}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix},$$
$\operatorname{rang}(A) = 4$ und A hat die Signatur 0.

5. **Lösung.** Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot A \cdot {}^{t}\boldsymbol{y}$ die durch A definierte alternierende Form. Unter den Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_4$ der kanonischen Basis suchen wir zunächst ein Paar, für das $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \neq 0$ ist. Offenbar ist dies bereits für $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 3$ erfüllt. Wir setzen

$$\boldsymbol{b}_1 := \frac{1}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}(1, 0, 0, 0),$$
$$\boldsymbol{b}_2 := \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, 0).$$

Es ergibt sich eine Basis $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ des von $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ erzeugten Unterraumes, bezüglich der die Einschränkung von $\boldsymbol{b}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Nun wird als Komplementärraum zu $\mathbb{R}\boldsymbol{b}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{b}_2$ der Unterraum W aller Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ bestimmt, für die $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{x}) = 0$ ist. W ist in unserem Fall die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix aus den ersten beiden Zeilen von A besteht. Wir erhalten als Erzeugendensystem die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (2, 4, 0, 3),$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (3, 1, 3, 0).$$

Entsprechend wird nun

$$\boldsymbol{b}_3 := \frac{1}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)} \cdot \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{12}(2, 4, 0, 3),$$
$$\boldsymbol{b}_4 := \boldsymbol{v}_4 = (3, 1, 3, 0)$$

gesetzt. Wir erhalten eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4)$, für die $\boldsymbol{b}$ die Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{E}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, d.h. $\mathcal{B}$ ist symplektisch.