Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 5 zum 18.5.09

1. Bestimmen Sie die (reellen!) Eigenwerte der Matrix $A \in \mathrm{M}(4, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 7 & -7 \\ -3 & 1 & -11 & 13 \\ -2 & 0 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie für folgende Matrizen die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume (jeweils durch Angabe einer Basis).

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R})$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{C})$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2)$

3.* Es sei $A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (d.h. $A = {}^{t}A$). Wir betrachten sie als Element von $\mathrm{M}(n; \mathbb{C})$. Beweisen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.

4. $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n; K)$ sei eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass $\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ die Menge der Eigenwerte von A ist.

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.614, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Lösungsblatt der Aufgabenserie 5 zum 18.5.09

1. **Lösung.** Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom $f = \chi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ und erhalten

$$f = \det(X\cdot \mathrm{E}_4 - A) = \det \begin{pmatrix} X & 1 & -2 & 2 \\ -1 & X+1 & -7 & 7 \\ 3 & -1 & X+11 & -13 \\ 2 & 0 & 7 & X-8 \end{pmatrix}$$
$$= X^4 + 4X^3 + 2X^2 + 8X.$$

Eigenwerte der gegebenen Matrix sind die Nullstellen von f. Offensichtlich ist X ein Faktor von f, es verbleibt nur die Bestimmung der Nullstellen von $g = X^3 + 4X^2 + 2X + 8$. Eine können wir erraten: Einsetzen einiger ganzer Zahlen für X ergibt insbesondere $g(-4) = 0$, g ist daher durch den Linearfaktor $X + 4$ teilbar. Wir erhalten

$$f = X \cdot (X + 4) \cdot (X^2 + 2).$$

Da der letzte Faktor keine Nullstelle im Grundkörper $\mathbb{R}$ besitzt, ergeben sich für die Matrix A genau zwei Eigenwerte 0 und -4.