Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 6 zum 25.5.09

1. $A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{R})$ sei eine Matrix und $\lambda \geq 0$ Eigenwert der Matrix A^2. Beweisen Sie, dass dann eine der Zahlen $\sqrt{\lambda}$ oder $-\sqrt{\lambda}$ Eigenwert von A ist.

2. Zeigen Sie, dass die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -17 & -24 & 0 \\ 12 & 19 & 0 \\ 60 & 120 & -5 \end{pmatrix}$$
diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine reguläre Matrix U mit der Eigenschaft $D = U^{-1} \cdot A \cdot U$ an.

3. K sei ein unendlicher Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung jeder Endomorphismus von V Summe zweier diagonalisierbarer Endomorphismen ist.

4. Wir betrachten die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie:
   (1) Ist $(a-d)^2 + 4bc > 0$, so ist A diagonalisierbar.
   (2) Ist $(a-d)^2 + 4bc < 0$, so ist A nicht diagonalisierbar.
   (3) Für $(a-d)^2 + 4bc = 0$ existieren sowohl Matrizen A, die diagonalisierbar sind als auch solche, für die das nicht zutrifft.
   (4) Ist $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, so ist A halbeinfach.

5. Untersuchen Sie, ob die folgende Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{F}_2)$ halbeinfach ist.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm