Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 9 zum 15.6.09

1. $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ sei eine komplexe Matrix. Beweisen Sie:
   (1) Falls A den Rang r hat, so besitzt A höchstens r von 0 verschiedene Eigenwerte (die mit der jeweiligen algebraischen Multiplizität gezählt werden).
   (2) Ist $r = 1$, so gilt: Der einzige eventuell von 0 verschiedene Eigenwert der Matrix A ist die Spur $\mathrm{tr}(A)$.

2. $\varphi : V \to V$ sei Endomorphismus des K-Vektorraumes V und $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:
   (1) Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von φ, so ist λ^k ein Eigenwert des Endomorphismus φ^k.
   (2) Ist $\boldsymbol{x} \in V$ Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ, so ist $\boldsymbol{x}$ auch Eigenvektor von φ^k zum Eigenwert λ^k.

3. Zeigen Sie: $A \in \mathrm{M}(n;K)$ ist genau dann regulär, wenn 0 kein Eigenwert der Matrix A ist.

4. Für welche $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die *Drehmatrix*
$$\mathrm{M}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
   über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

5. Klassifizieren Sie alle nilpotenten Matrizen $A \in \mathrm{M}(6;\mathbb{C})$ mit $\mathrm{rang}(A) = 3$ bis auf Ähnlichkeit.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.614, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm