Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 10 zum 22.6.09

1. Wir fixieren einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V.

   (1) φ sei ein nilpotenter Endomorphismus von V sowie $(\boldsymbol{v}_{11}, \dots, \boldsymbol{v}_{1q})$ eine Basis von $\ker(\varphi)$. Zu jedem der Vektoren $\boldsymbol{v}_{1j}$ wird für $i = 1, 2, \dots$ eine Kette von Vektoren $\boldsymbol{v}_{ij}$ gewählt, für die $\varphi(\boldsymbol{v}_{i+1\,j}) = \boldsymbol{v}_{ij}$ ist (dies entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wenn φ durch eine Matrix beschrieben wird).
   Zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{v}_{1j}, \dots, \boldsymbol{v}_{ij})$ ein linear unabhängiges System ist und das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.
   Überdies ist die Familie aller so aufgefundenen Vektoren $\boldsymbol{v}_{ij}$ linear unabhängig.

   (2) Wenn die unter (1) gefundene linear unabhängige Familie $(\boldsymbol{v}_{ij})_{i,j}$ aus $\dim(V)$ Vektoren besteht, d.h. eine Basis $\mathcal{B}$ von V bildet, so erhalten wir (bei geeigneter Anordnung der Vektoren) als zugehörige Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die jordansche Normalform.

   (3) Zeigen Sie, dass die jordansche Normalform eines nilpotenten Endomorphismus nicht immer so gefunden werden kann.

   (4) Erläutern Sie, wie sich aus dem Verfahren (1) im folgenden Spezialfall dennoch eine Methode ergibt, die jordansche Normalform eines Endomorphismus zu bestimmen: Das charakteristische Polynom zerfällt in (bekannte) Linearfaktoren, und sämtliche Eigenwerte haben die geometrische Multiplizität 1.

2. Bestimmen Sie die jordansche Normalform J der reellen Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   sowie eine Matrix $U \in \mathrm{GL}(4; \mathbb{R})$ für die $U^{-1} \cdot A \cdot U = J$ ist.

   Anmerkung. Das charakteristische Polynom ist ein Quadrat, seine Nullstellen sind reell.

3. Klassifizieren Sie alle Matrizen mit dem charakteristischen Polynom
$$\chi = X \cdot (X-1)^2 \cdot (X+1)^3$$
   bis auf Ähnlichkeit.

4. Es seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft
$$\varphi(\varphi(\boldsymbol{x})) = 2\varphi(\boldsymbol{x}) - 3\boldsymbol{x} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in V.$$
   Geben Sie alle möglichen jordanschen Normalformen für φ an!

---

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.614, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

5. Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m_A von A, indem Sie untersuchen, ob kleine Potenzen der Matrix linear abhängig sind.

(2) Ist A halbeinfach?

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Lösungsblatt der Aufgabenserie 10 zum 22.6.09

2. **Lösung.** Den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{R}^4$ bezeichnen wir mit φ.
Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$\chi_A = \det(X \cdot E_4 - A) = X^4 - 2X^3 + X^2 = (X^2 - X)^2$
erhalten wir die (sämtlich reellen) Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor
$$\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 0, 1)$$
erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden
$$\boldsymbol{v}_1 = (-3, 0, -2, 0)$$
als Lösung von
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren
$$\boldsymbol{v}_3 = (0, 1, 1, 0)$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$$
für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \boldsymbol{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix
$$U = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
mit $U^{-1} \cdot A \cdot U = J$ als jordansche Normalform der Matrix A.

5. **Lösung.** Offensichtlich ist m_A nicht linear (A ist keine Diagonalmatrix).
Nun testen wir, ob m_A quadratisch ist; dann muss A^2 plus ein (geeignetes) Vielfaches $u{\cdot}A$ von A diagonal sein. $A^2 + u \cdot A = v \cdot \mathrm{E}_4$ entspricht einem einfach auszuwertenden System linearer Gleichungen für u und v; wir schreiben einzelne davon auf und testen durch Einsetzen, ob die Bedingung erfüllt ist. Leicht zeigt sich, dass dies für $u = -2$ der Fall ist, dann ist weiter $v = -6$.
Wir haben so ein nichtkonstantes Polynom $f = X^2 - 2X + 6 \in \mathbb{R}[X]$ minimalen Grades mit $f(A) = 0$ gefunden. Da f normiert ist, folgt $f = \mathrm{m}_A$; dies ist die Antwort auf Frage (1).

Leicht ist zu sehen, dass m_A keine mehrfache Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt, daher ist A eine halbeinfache Matrix.