Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Serie 11 zum 29.6.09

1. $Y = P + \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w} \subseteq \mathbb{R}^4$ sei eine Parameterdarstellung der Ebene Y im 4-dimensionalen affinen Standardraum, die durch
$$P = (3, -3, 5, 1)\,,\ \boldsymbol{v} = (2, -2, -2, 1)\,,\ \boldsymbol{w} = (1, 2, 1, -3)$$
gegeben wird. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.

2. $(X, \mathrm{T}(X), \tau)$ sei ein affiner Raum, $f : X \to X$ eine affine Abbildung, für die $\mathrm{T}(f) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(X)}$ ist.
Beweisen Sie: f ist eine Translation, d.h. es existiert ein Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}(X)$, für den $f = \tau_{\boldsymbol{v}}$ gilt ($\tau_{\boldsymbol{v}}$ ist hierbei – wie üblich – die durch $\boldsymbol{v}$ definierte Translationsabbildung $\tau_{\boldsymbol{v}} : X \to X\,,\ P \mapsto P + \boldsymbol{v}$).

3. Im affinen Standardaum $\mathbb{F}_3^4$ wird der Unterraum Y_1 durch das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$
und der Unterraum Y_2 durch das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$
gegeben. Bestimmen Sie für Y_1, $Y_1 \cap Y_2$, $Y_1 \vee Y_2$ je eine affine Basis!

4. Im affinen Standardraum $\mathbb{F}_2^5$ sind die Unterräume
$$Y := P + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_2 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_3\,,$$
$$Z := Q + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_1 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_2 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_3$$
durch
$$P = (1, 1, 1, 1, 0),\quad Q = (0, 1, 1, 1, 1)\,,$$
$$\boldsymbol{y}_1 = (0, 0, 0, 1, 0),\quad \boldsymbol{y}_2 = (1, 1, 0, 1, 0),\quad \boldsymbol{y}_3 = (1, 0, 1, 0, 1),$$
$$\boldsymbol{z}_1 = (1, 0, 0, 1, 0),\quad \boldsymbol{z}_2 = (1, 0, 0, 1, 1),\quad \boldsymbol{z}_3 = (1, 0, 0, 1, 1)$$
gegeben. Stellen Sie fest, ob Y und Z parallel sind.

5. Im affinen Raum A sind die Geraden G, H gegeben, für die $G \cap H = \{P\}$ ein Punkt ist sowie Punkte $A_1, A_2, A_3 \in G$, $B_1, B_2, B_3 \in H$ mit $A_i \neq P$, $B_j \neq P$ für $i, j = 1 \ldots 3$.
Wir setzen voraus $A_1 \vee B_2 \parallel A_2 \vee B_1$ und $A_2 \vee B_3 \parallel A_3 \vee B_2$. Zeigen Sie, dass dann $A_1 \vee B_3 \parallel A_3 \vee B_1$ gilt.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.614, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Lösungsblatt der Aufgabenserie 11 zum 29.6.09

1. **Lösung.** Ist $U := \mathrm{T}(Y) = \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w}$ der Translationsraum von Y, so gilt $U = W^{\perp}$, wobei W den Raum derjenigen Linearformen auf $\mathbb{R}^4$ bezeichnet, die auf U verschwinden,
$$W = \{\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^4)^* \mid <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}> = 0\}\,.$$
Schreiben wir (x_1, x_2, x_3, x_4) für das Koordinatenquadrupel eines Vektors $\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^4)^*$ bezüglich der dualen Basis $(\boldsymbol{e}_1^*, \ldots, \boldsymbol{e}_4^*)$, so ist die Bedingung $\boldsymbol{u} \in W$ dazu äquivalent, dass das homogene lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
erfüllt ist. Eine zeilenäquivalente Umformung der Koeffizientenmatrix ergibt die Stufenmatrix
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$
aus der sich eine Basis $((1,-2,3,0),(4,7,0,6))$ der Lösungsmenge ablesen lässt. Bezeichnet A die Matrix mit diesen Zeilen, so ist $Ax = A \cdot {}^{\mathrm{t}}P$ ein Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge den Punkt $P \in Y$ enthält und dessen zugehöriges homogenes System die Lösungsmenge $\mathrm{T}(Y) = U$ besitzt. Wir erhalten
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 24 \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_4 &= -3 \end{aligned}$$
als lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.

3. **Lösung.** Mit dem gaußschen Algorithmus ist für das erste Gleichungssystem leicht die Lösungsmenge
$$Y_1 = \{\,(1,1,0,0) + t_1 \cdot (0,1,1,0) + t_2 \cdot (-1,-1,0,1) \mid t_1\,,\, t_2 \in \mathbb{F}_3\}$$
zu finden. Aus der Parameterdarstellung $Y_1 = P + \mathbb{F}_3\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{F}_3\boldsymbol{v}_2$ mit
$$P = (1,1,0,0)\,, \quad \boldsymbol{v}_1 = (0,1,1,0)\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = (-1,-1,0,1)$$
erhalten wir eine affine Basis $\{P, P_1, P_2\}$, wobei
$$P_1 = P + \boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1,0)\,, \quad P_2 = P + \boldsymbol{v}_2 = (0,0,0,1)$$
gewählt wurden.
Nun wird der Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2$ bestimmt. Wir erhalten ihn durch das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$
(gebildet aus den Gleichungen für Y_1 und Y_2). Die Lösungsmenge ist
$$Y_1 \cap Y_2 = \{\,(0,1,1,1)\,\},$$
und dieser Punkt bildet gleichzeitig eine affine Basis des Unterraumes $Y_1 \cap Y_2$.

Zur Bestimmung einer affinen Basis für $Y_1 \vee Y_2$ erinnern wir an die Dimensionsformel für den Verbindungsraum. Sie lautet (für $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$)

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2),$$

woraus wegen $\dim(Y_1) = \dim(Y_2) = 2$ und $\dim(Y_1 \cap Y_2) = 0$ sofort $\dim(Y_1 \vee Y_2) = 4$, d.h. $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{F}_3^4$ folgt. Affine Basis von $Y_1 \vee Y_2$ ist daher jede beliebige affine Basis des Raumes $\mathbb{F}_3^4$, beispielsweise die kanonische Basis

$$((0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).$$

4. **Lösung.** Der Translationsraum $\mathrm{T}(Y)$ ist von den Vektoren $\boldsymbol{y}_i$ erzeugt, entsprechend der Translationsraum $\mathrm{T}(Z)$ von den Vektoren $\boldsymbol{z}_j$ $(1 \leq i,j \leq 3.)$
Werden $\boldsymbol{y}_i$ als Spalten einer Matrix $A \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ und $\boldsymbol{z}_j$ als Spalten einer Matrix $B \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ gewählt, so ist offenbar Y genau dann zu Z parallel, wenn $\mathrm{rang}(A,B) = \mathrm{rang}(A)$ oder $\mathrm{rang}(A,B) = \mathrm{rang}(B)$ ist. Um dies zu prüfen, wird die Matrix

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

durch den gaußschen Algorithmus umgeformt. Wir erhalten eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

So folgt $\mathrm{rang}(A) = 3$ und $\mathrm{rang}(A,B) = 5$, Parallelität kann daher nur vorliegen, wenn $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(A,B)$ ist. Da B nur drei Spalten besitzt, ist jedoch $\mathrm{rang}(B) \leq 3$. Damit sind die Unterräume Y und Z nicht parallel.