## Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

## Serie 12 zum 6.7.09

1. Bestimmen Sie eine Hauptachsenform für das reelle quadratische Polynom
$$f = X_1^2 - 4X_1X_2 + 8X_2^2 + 4X_1X_3 - 16X_2X_3 + 8X_3^2 - 6X_3 - 6$$
und geben Sie die zugehörige affine Transformation der Unbestimmten an.

2. Verwenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt zur Bestimmung einer Orthonormalbasis des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$, deren Fahne mit der Fahne der folgenden Basis $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ übereinstimmt;
$$\boldsymbol{v}_1 = (3, 1, -1)\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = (3, -1, 1)\,, \quad \boldsymbol{v}_3 = (2, 1, -2)\,.$$

3. Führen Sie die Spektralzerlegung des euklidischen Standardraumes für die folgende Matrix aus:
$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. $\mathrm{P}_2$ sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq 2$ mit dem Skalarprodukt, das für
$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2\,, \quad g = b_0 + b_1X + b_2X^2\,, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$
durch
$$< f, g > = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$
definiert ist. Wir bezeichnen mit
$$\varphi : \mathrm{P}_2 \longrightarrow \mathrm{P}_2\,, \quad f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}$$
den Ableitungsoperator und mit $\varphi^\star$ seinen adjungierten Endomorphismus.
   (1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (f_1,\ f_2\,,\ f_3)$ mit
   $$f_1 = -X^2 + X,\ f_2 = 3X - 1,\ f_3 = X^2 - 2X$$
   eine Basis von $\mathrm{P}_2$ ist.
   (2) Bestimmen Sie die Matrix von $\varphi^\star$ bezüglich $\mathcal{B}$.

5. Geben Sie für das quadratische Polynom
$$f = X_1^2 + 4X_1X_2 + 4X_2^2 + X_1 - 3X_2 - 2 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$$
eine Bewegung der affinen euklidischen Standardebene an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie $f$ im neuen Koordinatensystem.

---
[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.614, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm