Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 1 zum 1.11.10

1. Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ bezeichne $\complement_M(X)$ das Komplement von X in M.
   Zeigen Sie, dass für beliebige Teilmengen $X, Y, Z \subseteq M$ gilt:
   (1) $\complement_M(X \cup Y) = \complement_M(X) \cap \complement_M(Y)$,
   (2) $\complement_M(X \cap Y) = \complement_M(X) \cup \complement_M(Y)$,
   (3) $\complement_M(X) \setminus Y = \complement_M(X \cup Y)$,
   (4) $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap \complement_M(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$
   $= X \cap \complement_M(Y) \cap \complement_M(Z)$.

2. Es sei $M = \{X_i \,|\, i \in I\}$ ein System von Mengen mit der Eigenschaft $\bigcap_{i \in I} X_i = \emptyset$.
   Beweisen oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels: Es gibt Mengen $X_i, X_j \in M$, so dass $X_i \cap X_j = \emptyset$.

3. A und B seien Mengen. Zeigen Sie:
   (1) $\mathrm{Pot}(A) \cap \mathrm{Pot}(B) = \mathrm{Pot}(A \cap B)$.
   (2) Wenn $A \subseteq B$, so $\mathrm{Pot}(A) \subseteq \mathrm{Pot}(B)$.
   (3) $\mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B) \subseteq \mathrm{Pot}(A \cup B)$ (wann gilt Gleichheit?)

4. A, B, C, D, U, V, H seien Aussagen. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagenverbindung
   $\Phi := (A \vee U) \wedge (\neg D \Rightarrow E)$,
   wenn die Wahrheitswerte der Grundaussagen $A, B, \ldots$ durch die folgende Tabelle gegeben sind.

A	B	C	D	E	U	V	H
F	W	F	F	F	F	W	W

5.* $A_1, \ldots, A_n$ seien Ausdrücke und B sei ein gültiger Ausdruck.
   (1) Zeigen Sie, dass $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (A_n \Rightarrow B) \ldots)$ und $\neg B \Rightarrow (A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \ldots))$ gültig sind.
   (2) Für welche n ist $\underbrace{(\ldots(((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \ldots) \Rightarrow A}_{n \text{ Pfeile}}$ gültig?

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm