Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 2 zum 8.11.10

1. Geben Sie jeweils eine nichtleere Menge A und eine Relation $R \subseteq A \times A$ mit den folgenden Eigenschaften an:
   (1) R ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv,
   (2) R symmetrisch, nicht reflexiv und nicht transitiv,
   (3) R ist reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch,
   (4) R ist irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv,
   (5) R ist reflexiv, transitiv und nicht antisymmetrisch.

2. Beweisen Sie:
   (1) Die in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definierte Relation $(m,n) \sim (k,l) \iff m+l = n+k$ ist eine Äquivalenzrelation.
   (2) Ist $(m,n) +_p (k,l) := (m+k, n+l)$, dann ist die so definierte „Operation“ $+_p$ assoziativ und kommutativ (es ist wohl klar, wie das gemeint ist).
   (3) Wir betrachten nun Klassen bezüglich der unter (1) definierten Äquivalenzrelation: Die Klasse von $(m,n) +_p (k,l)$ ist unabhängig von der Wahl der Klassen von (m,n) und (k,l), d.h. $(m,n) \sim (m',n')$ und $(k,l) \sim (k',l')$ impliziert stets $(m+k, n+l) \sim (m'+k', n'+l')$.

3. Für die Mengen M, N bezeichne M^N die Menge aller Abbildungen von N in M.
   (1) Bestimmen Sie die Mengen $\emptyset^M$ und $M^\emptyset$.
   (2) Wieviele Elemente enthält M^N, wenn M und N endlich sind?

4. X, Y, Z seien Mengen. X^Y bezeichnet die Menge aller Abbildungen von Y in X und $X \approx Y$ soll bedeuten, dass zwischen X und Y eine Bijektion existiert. Beweisen Sie:
   (1) Wenn $Y \cap Z = \emptyset$, so ist $X^{Y \cup Z} \approx X^Y \times X^Z$.
   (2) $(X \times Y)^Z \approx X^Z \times Y^Z$,
   (3) $X^{Y \times Z} \approx (X^Y)^Z$.

5.* Beweisen Sie: Jede Ordnung R einer Menge M lässt sich zu einer linearen Ordnung erweitern.

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm