Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 3 zum 15.11.10

1. Untersuchen Sie, ob eine der folgenden Operationen eine Gruppenstruktur auf der angegebenen Menge G definiert:
   (1) $G := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 |\ b \neq 0\}$ mit der Operation
   $$(a,b) \cdot (a',b') := (aa', ab' + ba'),$$
   (2) $G := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 |\ a \neq 0\}$ mit der Operation
   $$(a,b) \cdot (a',b') := (aa', ab' + ba').$$

2. $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine endliche, nichtleere Teilmenge von G.
   (1) Beweisen Sie: H ist Untergruppe von G genau dann, wenn für alle $x, y \in H$ gilt $x \cdot y \in H$.
   (2) Kann auf die Voraussetzung verzichtet werden, dass H endlich ist?

3.* Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch.

4. Mit G bezeichnen wir die *Symmetriegruppe* eines gleichseitigen Dreiecks, das wir als Teilmenge des Raumes betrachten. Damit meinen wir die Gruppe der Bewegungen, die diese Figur in sich überführen; jedes ihrer Elemente ist durch die Zuordnung der Ecken eindeutig bestimmt.
   (1) Geben Sie einen Isomorphismus $f : G \to \mathrm{S}_3$ an!
   (2) Bestimmen Sie die Untergruppe $f(U)$ von S_3, wenn U die Untergruppe der Drehungen des Dreiecks in der Ebene bezeichnet.
   (3) Lässt sich ein Isomorphismus der Symmetriegruppe eines Quadrats und der Gruppe S_4 finden?

5. Rechnen mit Permutationen:
   (1) Bestimmen Sie $\sigma \cdot \tau$ und $\tau \cdot \sigma$ für
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,2\,1\,5\,3\,4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,4\,2\,5\,3\,6 \end{pmatrix}.$$
   (2) Bestimmen Sie η^{-1} und alle Potenzen η^n der Permutation
   $$\eta = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 2\,7\,3\,6\,4\,1\,5 \end{pmatrix},$$
   wobei n die ganzen Zahlen durchläuft.

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 3 zum 15.11.10

5. **Lösung.**

(1) Es ist

$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,2\,3\,1\,4 \end{pmatrix}, \quad \tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,4\,1\,3\,2\,5 \end{pmatrix}.$$

(2) $\eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 6\,1\,3\,5\,7\,4\,2 \end{pmatrix}$, und die Potenzen von η sind

$\eta^1 = \eta$, $\eta^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 7\,5\,3\,1\,6\,2\,4 \end{pmatrix}$, $\eta^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,4\,3\,2\,1\,7\,6 \end{pmatrix}$, $\eta^4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 4\,6\,3\,7\,2\,5\,1 \end{pmatrix}$, $\eta^5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 6\,1\,3\,5\,7\,4\,2 \end{pmatrix}$, $\eta^6 = \mathrm{id} = \eta^0$.

Dabei genügt es offensichtlich, die Potenzen η^n für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen, denn wegen $\eta^6 = \mathrm{id}$ ist $\eta^{-1} = \eta^5$, also $\eta^{-n} = \eta^{5 \cdot n}$.

Ab η^7 wiederholen sich die Potenzen in der angegebenen Reihenfolge.