Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 4 zum 22.11.10

1. Für einen Zyklus σ der Länge t ist $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{t+1}$. Verwenden Sie diese Eigenschaft zur Bestimmung des Vorzeichens der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 14 & 21 & 9 & 8 & 10 & 16 & 17 & 15 & 5 & 11 & 20 & 2 & 7 & 18 & 13 & 19 & 6 & 1 & 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.* In S_n betrachten wir für $\sigma \in \mathrm{S}_n$ die Untergruppe $(\sigma) := \{\sigma^i |\ i \in \mathbb{Z}\}$. Die Zahl $o(\sigma) := |(\sigma)|$ heißt Ordnung von σ.

(1) Zeigen Sie: $(\sigma) = \{\sigma^i |\ i \in \mathbb{N}\}$.

(2) $\mathcal{M} := \{\tau \cdot (\sigma) |\ \tau \in \mathrm{S}_n\}$ mit $\tau \cdot (\sigma) := \{\tau \cdot \sigma^n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Partition der Menge S_n.

(3) Die Klassen der Partition $\mathcal{M}$ enthalten gleichviele Elemente, und es gilt

$$|\mathcal{M}| \cdot o(\sigma) = |\mathrm{S}_n|,$$

insbesondere ist also $o(\sigma)$ ein Teiler von $n! = |\mathrm{S}_n|$.

(4) Es sei $\mathrm{id} \neq \sigma \in \mathrm{S}_5$ mit $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ eine der Zahlen 2, 3, 5 ist.

(5)* Berechnen Sie die Ordnung einer Permutation mittels ihrer Zyklenzerlegung. Bestimmen Sie insbesondere die Ordnung von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 9 & 13 & 7 & 3 & 2 & 19 & 4 & 8 & 16 & 15 & 6 & 17 & 12 & 18 & 11 & 5 & 1 & 10 & 14 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_{19}$$

3. G sei eine Gruppe, H eine Untergruppe vom Index 2, d.h. eine Untergruppe, die genau zwei rechte Nebenklassen besitzt. Beweisen Sie: H ist Normalteiler in G.

4. Untersuchen Sie in jedem der folgenden Fälle, welche der aufgeführten Gruppen isomorph sind.

(1) $(\mathrm{S}_3, \circ)$, $(\mathbb{Z}/(6), +)$, $(\mathbb{Z}/(7)^*, \cdot)$

(2) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

(3) $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, wobei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen ist; die Operationen sind Einschränkungen der ebenso bezeichneten Operationen für Zahlen.

(4) $(\mathrm{D}_n, \circ)$ (die Diedergruppe) und $(\mathrm{S}_n, \cdot)$ (für ein festes $n \geq 2$)

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

5. Rechnen mit komplexen Zahlen:

   (1) a, b bezeichnen $a = -2i - 2$, $b = -3i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

   (2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft
   $$x^2 - ix + (10i + 2) = 0.$$

   (3) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = -16i$ mit $x \in \mathbb{C}$.

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 4 zum 22.11.10

1. **Ergebnis.** Wir finden die folgende kanonische Zerlegung der Permutation in elementfremde Zyklen:
(1,14,18)
(2,21,4,8,15,13,7,17,6,16,19,3,9,5,10,11,20,12)
Daraus ergibt sich $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.

2.* **Ergebnis.** Zu (5) geben wir das Resultat der Rechnung an. Durch
(1,9,16,5,2,13,12,17)
(3,7,4)
(6,19,14,18,10,15,11)
ist die Zyklenzerlegung der Permutation σ gegeben; es folgt $o(\sigma) = 168$.

5. **Lösung.**

(1) Es ist $a + b = -5i - 4$, $a - b = i$ und $ab = 10i - 2$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(3i-2)}{(-3i-2)\cdot(3i-2)} = \frac{-2i+10}{13} = -(\frac{2}{13}i - \frac{10}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = -40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i - 9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = -40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 2$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

(3) Wir setzen $x = u + iv$ mit reellen Zahlen u, v. Die Gleichung $x^3 = -16i$ ist nun äquivalent zu

$$u^3 + 3u^2vi - 3uv^2 - v^3i = -16i,$$

daher zu

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = 0 \\ 3u^2v - v^3 = -16. \end{cases}$$

Im Fall $u = 0$ ergibt die zweite dieser Bedingungen $v = 2\cdot\sqrt[3]{2}$, wobei die erste trivialerweise erfüllt ist.

Ist $u \neq 0$, so erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$u^2 - 3v^2 = 0, \text{ d.h. } (u + \sqrt{3}v)(u - \sqrt{3}v) = 0, \text{ also}$$
$$u = \pm\sqrt{3}v$$

und nach Einsetzen in die zweite

$$8v^3 = -16, \text{ daher } v = -\sqrt[3]{2}.$$

$x^3 = -16i$ ist daher genau dann erfüllt, wenn x eine der drei Zahlen $x = 2\cdot\sqrt[3]{2}\,i$, $x = \pm\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\,i$ ist.