Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 5 zum 29.11.10

1.* Bestimmen Sie alle $\mathbb{Z}$-Algebrahomomorphismen von $\mathbb{Z}[X]$ auf $\mathbb{Z}[X]$. Welche sind Isomorphismen?

2. Sind Polynome Funktionen?
Wir betrachten den dreielementigen Primkörper $K = \mathbb{F}_3$ und bilden den Polynomring $P := K[X]$ über K. Überprüfen Sie, dass der Einsetzungshomomorphismus durch
$$\varPhi : P \to \mathrm{Abb}(K, K)$$
$$(\varPhi(f))(\alpha) := f(\alpha) \quad \text{für } f \in P,\ \alpha \in K$$
einen Ringhomomorphismus $\varPhi$ definiert und untersuchen Sie diesen auf Injektivität.

3. Bestimmen Sie die Elemente x aus dem jeweils angegebenen Körper K, für die die angegebene Gleichung erfüllt ist.
   (1) $x^5 + x^4 + 1 = 0$ (K ist einer der Körper $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_7$)
   (2) $x^3 - 1 = 0$ (K ist einer der Körper $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$)

4. Berechnen Sie für die folgenden Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$
die angegebenen Ausdrücke, sofern diese definiert sind.
   $A + 3B - 4C$
   $A \cdot B \cdot C$
   $A \cdot {}^{\mathrm{t}}B \cdot C$
   $A \cdot (B + C)$
   $C + {}^{\mathrm{t}}A \cdot B$
   $A \cdot {}^{\mathrm{t}}A$
   ${}^{\mathrm{t}}A + A$
   ${}^{\mathrm{t}}(2A - B)$
   ${}^{\mathrm{t}}A \cdot A$
   ${}^{\mathrm{t}}(A \cdot B + C)$

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

5. Berechnen Sie die Matrix $f(A) \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_3)$, wenn $f \in \mathbb{F}_3[X]$ das Polynom $f = -X^2 + X - 1$ bezeichnet und $A \in M(3; \mathbb{F}_3)$ die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 5 zum 29.11.10

4. **Ergebnis.**

$A + 3B - 4C$ ist nicht definiert.

$A \cdot B \cdot C$ ist nicht definiert.

$A \cdot {}^{\mathrm{t}}B \cdot C$ ist nicht definiert.

$A \cdot (B + C)$ ist nicht definiert.

$$C + {}^{\mathrm{t}}A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -13 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot {}^{\mathrm{t}}A = \begin{pmatrix} 18 & -6 & -3 \\ -6 & 10 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$A + {}^{\mathrm{t}}A$ ist nicht definiert.

$${}^{\mathrm{t}}(2A - B) = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 6 \\ -8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^{\mathrm{t}}A \cdot A = \begin{pmatrix} 22 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

${}^{\mathrm{t}}(A \cdot B + C)$ ist nicht definiert.

5. **Lösung.** Die Aufgabe ist so zu verstehen, dass $\mathrm{M}(3; \mathbb{F}_3)$ als Algebra über $\mathbb{F}_3$ betrachtet wird; dann ist $f(A)$ das Bild von f beim Ersetzungshomomorphismus $X \mapsto A$. Die Zahl $1 \in \mathbb{F}_3$ entspricht dabei der Einheitsmatrix E_3; so ergibt sich $f(A) = -A^2 + A - 1$ als Summe von

$$-A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$