

Übungsaufgaben¹ Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 6 zum 6.12.10

- 1.* Überprüfen Sie, dass für beliebige Mengen F und G von Polynomen aus $K[X_1, \dots, X_n]$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

$$(1) \quad V(F \cup G) = V(F) \cap V(G),$$

$$(2) \quad F \subseteq G \implies V(F) \supseteq V(G),$$

$$(3) \quad V(F \cap G) \supseteq V(F) \cup V(G),$$

$$(4) \quad 1 \in F \implies V(F) = \emptyset,$$

$$(5) \quad V(\{0\}) = V(\emptyset) = K^n.$$

2. Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ aus $\mathbb{F}_3^5$, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$-x_3 - x_5 = 1$$

$$x_4 - x_5 = 1$$

3. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$-2x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 12$$

$$-12x_1 - x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 46$$

$$-7x_1 + 10x_2 + x_3 - 4x_4 = 28$$

$$x_1 + 10x_3 - 4x_4 = 10$$

über dem Körper K in jedem der folgenden Fälle

$$(1) \quad \text{char}(K) = 0,$$

$$(2) \quad \text{char}(K) = 5,$$

$$(3) \quad \text{char}(K) = 3.$$

Beachten Sie, dass das Symbol für eine ganze Zahl n auch als Bezeichnung für das Element $n \cdot 1 \in K$ verwendet wird.

4. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{C}$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ für die folgende Bedingungen erfüllt sind.

$$-x_1 - ix_2 - ix_3 = (i - 1)$$

$$ix_1 - (i + 1)x_2 + (i + 1)x_3 = -1$$

5. Lösen Sie für eine feste Zahl $c \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem:

$$x_1 + (c - 1)x_2 + (c - 3)x_3 = -(c + 3)$$

$$-x_1 + 5x_3 = 10$$

$$x_1 + (2c - 2)x_2 + (2c + 2)x_3 = -(2c - 10)$$

¹ Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version 0.62, <http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm>

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 6 zum 6.12.10

2. **Lösung.** Wir setzen Parameter $t_1, t_2 \in \mathbb{F}_3$ für die beiden Unbestimmten ein, die an keiner Stufenposition vorkommen.
 „Von unten“ beginnend ergibt sich durch schrittweise Substitution nun $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ in Abhängigkeit von den Zahlen t_i . Durch Umstellen erhalten wir die Lösungsmenge $\{(-1, 0, -1, 1, 0) + t_1 \cdot (-1, 1, 0, 0, 0) + t_2 \cdot (-1, 0, -1, 1, 1) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{F}_3\} \subseteq \mathbb{F}_3^5$.

3. **Ergebnis.**

- (1) $\{(-2, 2, 2, 2)\},$
- (2) $\{(0, -1, -2, 0) + t_1 \cdot (-1, -1, 2, 1) \mid t_1 \in K\},$
- (3) $\{(1, -1, 0, 0) + t_1 \cdot (-1, 1, 1, 0) + t_2 \cdot (1, -1, 0, 1) \mid t_1, t_2 \in K\}.$

4. **Lösung.** Mit dem gaußschen Algorithmus wird die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems in die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -1-i & -i & (i-1) \\ 0 & -i(i+2) & -(i+2) \end{pmatrix}$$

überführt. Stufenindizes sind 1 und 2. Entsprechend der verbleibenden Position setzen wir einen Parameter $x_3 = t \in \mathbb{C}$ ein. Nach Umstellen der zweiten Gleichung ergibt sich

$$x_2 = -(2i-1)t - (2i-1), \text{ sowie durch Einsetzen in die erste}$$

$$x_1 = -(2i+2)t - (2i+1), \text{ folglich}$$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (-(2i+2)t - (2i+1), -(2i-1)t - (2i-1), t) \\ &= (-(2i+1), -(2i-1), 0) + t \cdot (-(2i+2), -(2i-1), 1). \end{aligned}$$

Der gaußsche Algorithmus zeigt, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung gefunden wurde, wir erhalten damit die Lösungsmenge des Gleichungssystems als

$$\{(-(2i+1), -(2i-1), 0) + t \cdot (-(2i+2), -(2i-1), 1) \mid t \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

5. **Lösung.** Mit dem gaußschen Algorithmus erhalten wir leicht das folgende äquivalente System:

$$\begin{aligned} x_1 + (c-1)x_2 + (c-3)x_3 &= -(c+3) \\ (c-1)x_2 + (c+2)x_3 &= -(c-7) \\ 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Im Falle $c \neq 1$ ergibt sich daraus die Lösungsmenge

$$\{(0, -3, 2)\},$$

sowie für $c = 1$

$$\{(0, 0, 2) + t \cdot (0, 1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$