Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 8 zum 10.1.11

1. Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ über den reellen Zahlen betrachten wir die folgenden Teilmengen; entscheiden Sie in jedem Fall, ob ein Untervektorraum vorliegt.

   (1) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x+y-z=0\}$

   (2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x-y+2z=3 \text{ oder } x=y\}$

   (3) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x-y+2z=0 \text{ oder } x=y\}$

   (4) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x=n,\ y=2n,\ z=3n,\ \text{mit } n \in \mathbb{Z}\}$

   (5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x=0 \text{ oder } y=0 \text{ oder } z=0\}$

   Hinweis. U ist Unterraum des K-Vektorraumes V, wenn die Operationen von V sich auf die Teilmenge U einschränken lassen und U mit diesen Einschränkungen eine Vektorraum bildet.

2. (1) Im reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ bezeichne U die Menge aller (x,y,z) mit

   $$\begin{aligned} x-3y+2z&=0\\ x+y-z&=0\,. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass U ein Unterraum ist.

   (2) W sei die Menge aller (x,y,z) mit

   $$\begin{aligned} x-3y+2z&=1\\ x+y-z&=0. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass W kein Unterraum ist!

   (3) $L \subseteq K^n$ sei die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

   $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

   über dem Körper K. Zeigen Sie, dass L genau dann ein Unterraum des Standardraumes K^n über K ist, wenn das obige System homogen ist (d.h. $b_1 = \ldots = b_m = 0$).

3. V sei ein K-Vektorraum und $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$. Wir definieren eine Abbildung $f : K^n \to V$ durch

   $$f(x_1, \ldots, x_n) := x_1v_1 + \ldots + x_nv_n.$$

   Zeigen Sie:

   (1) f ist eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen.

   (2) f ist genau dann surjektiv, wenn $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ ein Erzeugendensystem von V bildet.

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

4. $f : K^n \to K^m$ und $g : K^m \to K^p$ seien lineare Abbildungen von Standardvektorräumen über dem Körper K. Mit $M(f)$, $M(g)$, $M(g \cdot f)$ bezeichnen wir die Matrizen der entsprechenden linearen Abbildungen.

   Beweisen Sie: $M(g \cdot f) = M(g) \cdot M(f)$.

5.* $V = K^2$ sei der Standardvektorraum über dem Körper K. Für lineare Abbildungen $f, g \in \mathrm{End(V)}$ definieren wir eine Relation durch

$$f \sim g \iff \exists u \in \mathrm{GL}(V) : u \cdot f = g \cdot u.$$

   Zeigen Sie:

   (1) $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf $\mathrm{End(V)}$.

   (2) Wir fixieren $f \in \mathrm{End(V)}$ und nehmen an, es existieren zwei verschiedene Zahlen $\lambda \in K$, für die $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ kein Automorphismus ist. Dann liegt in der Äquivalenzklasse von V ein Endomorphismus g, für den $M(g)$ Diagonalmatrix ist.

   (3) Die Behauptung unter (2) kann für einzelne f auch richtig sein, wenn die angegebene Voraussetzung nicht erfüllt ist.