Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 9 zum 17.1.11

1. Wir betrachten einen Homomorphismus $f : V \to W$ von K-Vektorräumen. Zeigen Sie: Es existiert genau dann eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \cdot f = \mathrm{id}_V$, wenn $\ker(f) = \{0\}$.

2.* Wir betrachten eine Folge

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

linearer Abbildungen von K-Vektorräumen mit der Eigenschaft, dass das Bild jedes auftretenden Homomorphismus gleich dem Kern des nachfolgenden ist (d.h. es liegt eine *exakte Folge* vor). Beweisen Sie, dass V zu $V' \bigoplus V''$ isomorph ist.

3. Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Unterräume des Vektorraumes U_3 und $U_1 \subseteq U_2$, so ist U_2/U_1 Kern eines kanonischen Homomorphismus

$$U_3/U_1 \to U_3/U_2, \quad \boldsymbol{v} + U_1 \mapsto \boldsymbol{v} + U_2,$$

der einen Isomorphismus $(U_3/U_1)/(U_2/U_1) \cong U_3/U_2$ induziert.

4. Wir betrachten die Vektoren
   (1) $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 2, -2)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,
   (2) $(-1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0)$ im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$,
   (3) $(0, -1, 1, -2)$, $(1, -1, 0, 1)$, $(-1, -2, 1, 2)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$,
   (4) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,
   (5) $(i, -2)$, $(1, (i + 1))$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$,
   (6)* $\ln(2)$, $\ln(3)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

   Stellen Sie in jedem Fall fest, ob die angegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem bzw. ein linear unabhängiges System bilden. Die Antworten sind zu begründen.

5. C sei der lineare Code im 8-dimensionalen Standardraum über $\mathbb{F}_2$, der als Lösungsmenge von $A \cdot {}^{\mathrm{t}}x = 0$ gegeben ist,

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1&1&0 \\ 1&0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

   (1) Berechnen Sie das minimale Gewicht von C.
   (2) Ist C ein 2-Fehler-korrigierender Code?
   (3) Welche Informationsrate hat C?

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 9 zum 17.1.11

4. **Ergebnis.** Die angegebenen Vektoren sind
   (1) linear unabhängig und ein Erzeugendensystem,
   (2) linear abhängig, kein Erzeugendensystem,
   (3) linear unabhängig, kein Erzeugendensystem,
   (4) linear abhängig, kein Erzeugendensystem,
   (5) linear unabhängig und Erzeugendensystem,
   (6) linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem.

   Zur Begründung bleibt natürlich noch etwas zu sagen ...

5. **Lösung.** Die Spalten der Matrix A sind alle von der Nullspalte verschieden. Über dem Grundkörper $\mathbb{F}_2$ bedeutet dies, dass ein Paar solcher Spalten genau dann linear abhängig ist, wenn beide übereinstimmen.

   Wir bemerken, dass A keine zwei übereinstimmenden Spalten besitzt. Dann ist das minimale Gewicht von C größer 2 (vgl. 3/3/2, Beispiel 10). Es ist auch nicht schwer zu sehen, dass keine Spalte von A Summe zweier anderer Spalten ist. Darüber hinaus gibt es vier linear abhängige Spalten. Es folgt, dass das minimale Gewicht von C gleich 4 ist; C muss daher ein 1-Fehler-korrigierender Code sein.

   Die Informationsrate von C ist $\dfrac{1}{2}$.