

Übungsaufgaben¹ Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 10 zum 24.1.11

1. Im K -Vektorraum V fixieren wir Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, $n \geq 2$. Zeigen Sie:
Das $(n-1)$ -Tupel $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_1)$ linear unabhängig ist.
2. Nachfolgend ist in jedem Fall ein Vektorraum V mit einer Familie $\mathcal{B}$ von Vektoren gegeben. Prüfen sie jeweils, ob $\mathcal{B}$ eine Basis ist und bestimmen Sie in diesem Fall die Koordinaten von $\mathbf{x} \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$.
 - (1) $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mit $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ im Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ sowie $\mathbf{x} = (-3, -3, -1)$.
 - (2) V sei der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ mit $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ und $\mathbf{x} = (-1, 1, -1)$.
 - (3) V sei der $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$, sowie $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$, $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$.
 - (4) $V = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ sei der von $\{1, \sqrt{2}\}$ erzeugte $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und $\mathcal{B} := (3, \sqrt{2})$ sowie $\mathbf{x} = (1 + \sqrt{8})^2$.
3. Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ wird durch $U := \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbb{R}\mathbf{c} + \mathbb{R}\mathbf{d} + \mathbb{R}\mathbf{e}$ ein Unterraum gegeben, wobei
$$\mathbf{a} = (-2, 0, -1, -1), \mathbf{b} = (0, -2, -1, 2), \mathbf{c} = (-4, -2, -3, 0),$$
$$\mathbf{d} = (2, 1, -2, 1), \mathbf{e} = (0, -1, -4, 2).$$
Wählen Sie aus der Menge $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ der Erzeugenden von U eine Basis aus!
4. Wir betrachten den Unterraum des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes aller Polynome über dem Körper der reellen Zahlen, der durch die Polynome vom Grad ≤ 2 gebildet wird. Zeigen Sie, dass $(-3, X-1, X^2-2)$ eine Basis ist und bestimmen Sie die Koordinaten des Polynoms $f = -X^2 - X$ bezüglich dieser Basis.
- 5.* V bezeichnet den reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ und W den reellen Standardraum $\mathbb{R}^2$.
 - (1) Existiert eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft
$$f(-2, -1, 2) = (-3, -2)$$
$$f(2, 2, 0) = (3, 3)$$
$$f(0, -1, -2) = (1, -3) ?$$
 - (2) Existiert eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft
$$f(2, -1, -1) = (0, -1)$$
$$f(-1, -2, 2) = (-2, -1)$$
$$f(2, 0, -1) = (2, -1) ?$$
 - (3) Geben Sie eine Verallgemeinerung Ihres Resultats an!

¹ Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 10 zum 24.1.11

2. Ergebnis.

- (1) $\mathcal{B}$ ist eine Basis (kanonische Basis des gegebenen Standardraumes). Die gesuchten Koordinaten sind $(-3, -3, -1)$.
- (2) $\mathcal{B}$ ist keine Basis.
- (3) $\mathcal{B}$ ist keine Basis.
- (4) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\mathbf{x}$ sind $(3, 4)$.

3. **Ergebnis.** Die Vektoren $(-2, 0, -1, -1)$, $(0, -2, -1, 2)$, $(2, 1, -2, 1)$ bilden eine Basis von U .

4. **Ergebnis.** Die Darstellung von f als Vielfachensumme der gegebenen Polynome führt nach Koeffizientenvergleich auf ein leicht zu lösendes lineares Gleichungssystem. Wir erhalten hier die Koordinaten $(1, -1, -1)$.

5.* Lösung zu (1), (2).

- (1) Offenbar ist
$$(0, -1, -2) = -1 \cdot (-2, -1, 2) - 1 \cdot (2, 2, 0);$$
wäre f linear, so hätten wir
$$f(0, -1, -2) = -1 \cdot f(-2, -1, 2) - 1 \cdot f(2, 2, 0) = (0, -1) \neq (1, -3).$$
Folglich kann f nicht linear sein.
- (2) $f(x, y, z) = (2x + 2y + 2z, -x - z).$