Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 12 zum 7.2.11

1. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $M := \mathrm{M}(2;\mathbb{R})$ der reellen 2×2-Matrizen werden mit E_{ij} diejenigen Matrizen bezeichnet, die an der (i,j)-ten Position den Wert 1 haben und an den übrigen den Wert 0.
   (1) Beweisen Sie, dass die Matrizen $(\mathrm{E}_{11}, \mathrm{E}_{12}, \mathrm{E}_{21}, \mathrm{E}_{22})$ eine Basis von M bilden.
   (2) Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung $\varphi : M \to M$, die durch $\varphi(X) := {}^tX$ definiert ist.

2. Überprüfen Sie, dass die angegebenen Tupel von Vektoren Basen sind und bestimmen Sie die dualen Basen für
   (1) $$((0,-2,1),(-1,-2,2),(-2,-1,-1))$$
   im Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$, sowie für
   (2) $$((1,1),(1,0))$$
   im Standardvektorraum $\mathbb{F}_3^2$ über $\mathbb{F}_3$.

3. Es sei U der Unterraum des reellen Standardvektorraumes $V = \mathbb{R}^4$, der durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ erzeugt wird, $\boldsymbol{v}_1 = (-2,-1,2,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,-2,2,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,0,-2,-1)$. Weiter wird durch
   $$U' = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V \mid -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$
   ein Unterraum von V gegeben. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraumes $U \cap U'$ von V.

4. V sei ein Vektorraum, $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n \in V$ und $(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ linear unabhängig.
   Beweisen Sie: Sind $\boldsymbol{w}_1,\dots \boldsymbol{w}_m \in V$ und ist jeder Vektor $\boldsymbol{v}_i$ Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{w}_j$ $(j = 1,\dots,m)$, so gilt $n \leq m$.

5. Im K-Vektorraum V betrachten wir eine Familie $(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)$ von Vektoren, für die $(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)$ linear unabhängig ist. Beweisen Sie:
   Höchstens einer der Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ ist Linearkombination der vorhergehenden Vektoren $\boldsymbol{v}_j$ mit $j < i$.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 12 zum 7.2.11

2. **Ergebnis.**
(1) Die duale Basis ist durch $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ gegeben, wobei
$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \frac{4}{7}x - \frac{5}{7}y - \frac{3}{7}z$$
$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{4}{7}z$$
$$\boldsymbol{w}(x,y,z) = -\frac{2}{7}x - \frac{1}{7}y - \frac{2}{7}z.$$
(2) Die duale Basis ist durch $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ gegeben, wobei
$$\boldsymbol{u}(x,y) = y$$
$$\boldsymbol{v}(x,y) = x - y.$$

3. **Ergebnis.** $U \cap U'$ ist Lösungsmenge des folgenden Systems:
$$x_1 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
Daraus erhalten wir für $U \cap U'$ als Basis
$$((0,-1,0,1),(-1,0,1,0)).$$