Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 13 zum 14.2.11

1. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome
$$f = X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 3X,$$
$$g = X^6 - 4X^5 - 7X^4 + 23X^3 + 16X^2 + 19X - 12$$
aus $K[X]$, falls K einer der folgenden Körper ist:
   (1) $K = \mathbb{R}$,
   (2) $K = \mathbb{F}_3$,
   (3) $K = \mathbb{F}_2$.

2. Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad 2 bzw. 3 aus $\mathbb{F}_2[X]$. Wieviele irreduzible Polynome vom Grad 4 gibt es über $\mathbb{F}_2$?

3. Zeigen Sie: Die Zahl $91 \in \mathbb{N}$ besitzt keine rationale Wurzel.

4. V sei ein K-Vektorraum, U ein Unterraum, für den $t := \dim_K(V/U)$ endlich ist. Beweisen Sie: Es existieren Linearformen $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$ auf V mit der Eigenschaft $U = \ker(\varphi_1) \cap \ldots \cap \ker(\varphi_t)$.

5. V bezeichne den reellen Standardraum $\mathbb{R}^4$.
   (1) $V_1 \subseteq V$ sei der durch die Gleichung $x_1 + x_2 - x_4 = 0$ definierte Unterraum. Geben Sie ein Erzeugendensystem für V_1 an.
   (2) Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem für $V_1 \cap V_2$,
   $$V_2 := \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0, -2) + \mathbb{R} \cdot (0, 1, -2, -2).$$
   (3) Welche Dimensionen haben die Vektorräume V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ und $V_1 + V_2$?

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm