Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 1 zum 25.10.11

1. Geben Sie in den folgenden Kategorien initiale und terminale Objekte an, sofern sie existieren (Nachweis gefordert):
   (i) $(\underline{\mathbf{2}})$
   (ii) $(\underline{\mathbf{3}})$
   (iii) $(\mathbf{mod}_R)$ (R ist ein kommutativer Ring mit Eins)
   (iv) (**cring**) (Kategorie aller kommutativen Ringe mit Eins)
   (v) (**set**)

2. Ein Morphismus $f : M \to N$ in einer Kategorie heißt Monomorphismus, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt: Sind $g_1 : P \to M$ und $g_2 : P \to M$ Morphismen mit $f \cdot g_1 = f \cdot g_2$, so ist $g_1 = g_2$.
   (1) Zeigen Sie, daß in der Kategorie $\mathcal{C} := (\mathbf{mod}_{\mathcal{R}})$ der Moduln über einem gegebenen Ring R der Morphismus f genau dann ein Monomorphismus ist, wenn er injektiv ist.
   (2) Definieren Sie einen dualen Begriff „Epimorphismus" und zeigen Sie, daß in der obigen Kategorie $\mathcal{C}$ ein Morphismus genau dann Epimorphismus ist, wenn er surjektiv ist.
   (3) Zeigen Sie, daß in der Kategorie **(set)** der Mengen ein Morphismus genau dann Epimorphismus ist, wenn er surjektiv ist.
   (4) Geben Sie eine Kategorie von Mengen und Abbildungen an, in der ein nicht surjektiver Epimorphismus existiert.

3. Wir betrachten ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\alpha"'] & V' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\beta"'] & W' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

von Morphismen in der Kategorie $\mathcal{C} := (\mathbf{mod}_{\mathcal{R}})$ der R-Moduln. Dabei setzen wir voraus:

   (i) Die Zeilen sind *exakt*, d.h. das Bild jeder Abbildung in einer Zeile ist gleich dem Kern der nachfolgenden (soweit eine angegeben ist).
   (ii) Das Diagramm *kommutiert*, d.h. im vorliegenden Fall gilt $\varphi \cdot \alpha = \beta \cdot \varphi'$ und $\psi \cdot \beta = \gamma \cdot \psi'$.

Beweisen Sie:
   (1) Sind die Morphismen α und γ injektiv, so ist auch β injektiv.
   (2) Sind die Morphismen α und γ surjektiv, so ist auch β surjektiv.

(3) Wir betrachten nun eine beliebige exakte Folge

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow 0\,.$$

Bilden wir die (äußere) direkte Summe $U \oplus W$, so ergibt sich auf natürliche Weise ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\mathrm{id}_U"'] & U \oplus W \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, dotted, "\beta"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_W"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Beweisen Sie: Ist R ein Körper, so existiert Morphismus $\beta : U \oplus W \to V$, für den dieses Diagramm kommutiert, und β ist ein Isomorphismus.

(4) Nun sei $R = \mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Aussage (3) dann nicht immer stimmt.