Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 3 zum 8.11.11

1. (Dies ist der Teil der Serie 2, Aufgabe 2 (ii), (iii), bei dem der Abgabetermin verschoben wurde.)

   R sei ein kommutativer Ring.

   (i) Bestimmen Sie $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ für einen R-Modul M.

   (ii) Bestimmen Sie für ganze Zahlen m, n den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n))$.

2. Geben Sie die durch folgende Präsentationsmatrizen definierten abelschen Gruppen als direkte Summen zyklischer Gruppen an.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 & -4 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. R sei ein euklidischer Ring. Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n, m; R)$. Beweisen Sie, daß es Matrizen $U \in \mathrm{M}(n; R)$ und $V \in \mathrm{M}(m; R)$ mit $\det(U) = \det(V) = 1$ gibt, für die $U \cdot A \cdot V$ eine Matrix ist, die höchstens an den Positionen (i,i) von 0 verschiedene Einträge hat.

   Nun sei $R = \mathbb{Z}$. Geben Sie solche Matrizen U, V für den Fall an, daß A die folgende Matrix ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.* Ein R-Modul P heißt projektiv, falls er die folgende Eigenschaft besitzt:

   ($*$) Für alle surjektiven Homomorphismen $\varphi : M \to N$ und alle Homomorphismen $\alpha : P \to N$ existiert ein Homomorphismus $\psi : P \to M$ mit $\varphi \cdot \psi = \alpha$.

   Beweisen Sie:

   (i) Jeder freie Modul P hat die Eigenschaft ($*$).

   (ii) Sei

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

   eine exakte Folge und M'' projektiv. Dann ist M isomorph zur direkten Summen von M' und M''.

   (iii) Wenn R ein euklidischer Ring ist, so ist jeder endlich erzeugte Modul mit der Eigenschaft ($*$) ein freier Modul.