Lösung der Aufgabe 3.1 (ii)

gesucht:
Beschreibung des Isomorphietyps des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n))$

Da ein Element $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n))$ durch das Bild der Klasse von 1 mod (m) vollständig bestimmt ist, bleibt zu prüfen, welche Elemente $\overline{a} \in \mathbb{Z}/(n)$ als Bild infrage kommen:

Notwendig muss $a \cdot m$ in der Nullklasse liegen, also

$$(*) \quad a \cdot m \in (n)$$

Dies ist äquivalent zur Bedingung

$$(**) \quad a \in \frac{n}{\mathrm{ggT}(m,n)} =: n'.$$

(durch Faktorzerlegung leicht zu sehen). Umgekehrt ist $(*)$ auch hinreichend, d.h. durch

$$\varphi_a(x \bmod (m)) := a \cdot x \bmod (n)$$

wird genau dann ein Homomorphismus $\mathbb{Z}/(m) \to \mathbb{Z}/(n)$ definiert, wenn $(*)$ (oder gleichbedeutend $(**)$) erfüllt ist. Weitere Homomorphismen gibt es nicht, also ist

$$\Phi : (n') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)) \text{ mit } a \mapsto \varphi_a$$

ein surjektiver Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln. Wir bestimmen $\ker(\Phi)$:

φ_a ist genau dann die Nullabbildung, wenn $a \in (n)$. Wenden wir den Homomorphiesatz auf Φ an, so ergibt sich $\mathrm{im}(\Phi) \cong (n')/\ker(\Phi)$, also

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)) \cong (n')/(n).$$