Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 4 zum 15.11.11

1. Für einen Ring R definieren wir den Annullator $\mathrm{Ann}_R(M)$ eines R-Moduls M durch $\mathrm{Ann}_R(M) := \{a \in R \mid \forall m \in M : \ a \cdot m = 0\}$.
   (1) Zeigen Sie: $\mathrm{Ann}_R(M)$ ist ein Ideal in R.
   (2) Bestimmen Sie $\mathrm{Ann}_R(M)$ für $M = R/\boldsymbol{a}$, wobei $\boldsymbol{a}$ ein beliebiges Ideal in R bezeichnet.
   (3) Bestimmen Sie $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(17) \oplus \mathbb{Z}/(9) \oplus \mathbb{Z}/(15))$.
   (4) Zeigen Sie: Die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ ist ein $\mathbb{Z}[X]$-Modul mit der Operation
   $$f \cdot m := f(2) \cdot m, \qquad f \in \mathbb{Z}[X], \ m \in \mathbb{Z}$$
   und bestimmen Sie $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z})$.

   Anmerkung. Die Definition des Annullators wurde bereits in der Vorlesung gegeben. Eigenschaft (1) wurde auch bereits benutzt, allerdings nicht bewiesen.

2. Die nachfolgend angegebenen Teilmengen des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen werden (soweit die Einschränkungen existieren) mit der üblichen Addition bzw. Multiplikation von Zahlen versehen.
   Beweisen Sie:
   (1) Der Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2.
   (2) $K := \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist ein Körper.
   (3) K ist als R-Modul nicht endlich erzeugt.

3. Wir untersuchen den Ring $R = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
   (1) Bestimmen Sie die Einheiten in R.
   (2) Zeigen Sie, daß die folgenden Faktorzerlegungen von $6 \in R$ nur irreduzible, paarweise nichtassoziierte Ringelemente enthalten:
   $$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$$

   Anmerkung. Damit ist gezeigt, dass es hier keine eindeutige Faktorzerlegung in irreduzible Elemente gibt. Es folgt insbesondere, dass $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ kein Hauptidealring ist.

4.* $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe und $\varphi : (\mathbb{Q}, +) \to (G, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir setzen voraus, dass φ nicht jedes Element von $\mathbb{Q}$ auf das neutrale Element der Gruppe G abbildet.
   Zeigen Sie, dass G unendlich ist.