Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 5 zum 22.11.11

1. Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung 720.

2. $K \supseteq k$ sei eine Körpererweiterung, d.h. k ist Unterkörper des Körpers K.

   $\alpha \in K$ heißt α algebraisch (über k), wenn ein nichtkonstantes Polynom $f \in k[X]$ existiert, für das $f(\alpha) = 0$ ist.

   Beweisen Sie:

   α ist genau dann algebraisch, wenn ein Zwischenkörper $K \supseteq K' \supseteq k$ mit $\alpha \in K'$ existiert, der als k-Vektorraum eine endliche Dimension hat, $\dim_k(K') < \infty$.

3. R bezeichnet einen Ring.

   Charakterisieren Sie die direkte Summe zweier R-Moduln als Koprodukt in der Kategorie $(\mathbf{mod}_R)$.

4.* Wir betrachten die Gruppe S_n der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

   (1) Zeigen Sie, dass die durch $\sigma \sim \tau \iff \exists \rho(\sigma = \rho^{-1} \cdot \tau \cdot \rho)$ gegebene Relation auf S_n („Konjugation") eine Äquivalenzrelation ist.

   (2) Wie wir schon wissen, ist eine Permutation (im wesentlichen eindeutig) Produkt elementfremder Zyklen. Wir sagen, σ hat die Zyklenstruktur $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, falls in dieser Zerlegung ν_2 Zyklen der Länge 2, ν_3 Zyklen der Länge $3, \ldots, \nu_r$ Zyklen der Länge r usw. auftreten und $\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + n\nu_n = n$ ist.

   Beweisen Sie: Die Abbildung, die jeder Permutation aus S_n ihre Zyklenstruktur zuordnet, ist eine vollständige Invariante der Konjugation.

Hinweis.

Frau Enders wird ab 21.11.11 ihre Sprechstunde jeweils am

Montag, 11.00 - 12.00 im Raum 1.112

halten (nicht in der Ferienzeit). Fragen zur Korrektur der Übungsaufgaben können Sie also persönlich dort oder wie bisher unter der bekannten Mailadresse stellen:

enders@mathematik.hu-berlin.de